UNIVERSIDADE FEDERAL DE SANTA MARIA

CENTRO DE CIÊNCIAS NATURAIS E EXATAS

GRUPO PET MATEMÁTICA

Noções Básicas de Cálculo e Geometria Plana com o GeoGebra

Angela Mallmann Wendt

Eduardo Buriol de Oliveira

Laura Dalmolin

Luana Kuister Xavier

Orientador: Prof. Dr. Antonio Carlos Lyrio Bidel

Santa Maria, junho de 2012.

Sumário

1. Introdução

Este minicurso foi desenvolvido pelos integrantes do Grupo PET Matemática - Programa de Educação Tutorial - Angela Mallmann Wendt, Eduardo Buriol de Oliveira, Laura Dalmolin e Luana Kuister Xavier, sob orientação do Professor Tutor Antônio Carlos Lyrio Bidel, como uma proposta de qualificar a formação de bolsistas e acadêmicos na utilização de novas tecnologias aplicadas ao ensino e aprendizagem da matemática.

O GeoGebra é um software de geometria dinâmica livre, que permite a construção de diversos objetos geométricos, como pontos, vetores, segmentos, retas, secções cônicas, gráficos representativos de funções e curvas parametrizadas; os quais podem ser modificados dinamicamente. Os valores e coordenadas podem ser introduzidas diretamente com o teclado, além da vantagem de podermos trabalhar utilizando variáveis vinculadas a números, vetores e pontos. Além disto, o GeoGebra nos permite determinar derivadas e integrais de inúmeras funções, além de oferecer um conjunto de comandos relacionados com análise matemática, álgebra, álgebra linear, geometria analítica, entre outros.

Esta apostila contempla de forma sucinta e introdutória os principais recursos do GeoGebra, uma vez que serve de apoio didático para um minicurso de curta duração.

2. Instalação do Software

O GeoGebra é um software livre, e para adquiri-lo deve-se proceder da seguinte maneira:

1. Acesse a página do grupo PET Matemática: www.ufsm.br/petmatematica;

2. Acesse a opção Downloads. Fazendo isto, aparecerão os programas disponíveis para download na página do grupo. Escolha a opção GeoGebra. Fazendo isso você será remetido à página oficial do GeoGebra;

3. Ao acessar a página inicial do GeoGebra, clique em Download;

4. Clique na opção **Instalação Off-line**. Ao fazer isso será feito o download do programa na sua versão mais atual.

Observação: Caso seu computador não possua o programa Java, outra página será aberta solicitando a instalação do mesmo. Nesta página, basta fazer o download e então o GeoGebra será instalado no seu computador; e um ícone será criado na área de trabalho.

3. Apresentação do Software

Ao inicializar o GeoGebra abre-se uma janela, cuja a interface é composta por uma barra de menus, uma barra de ferramentas, a janela de álgebra, a janela de visualização, o campo de entrada de texto, um menu de comandos e o menu de símbolos.

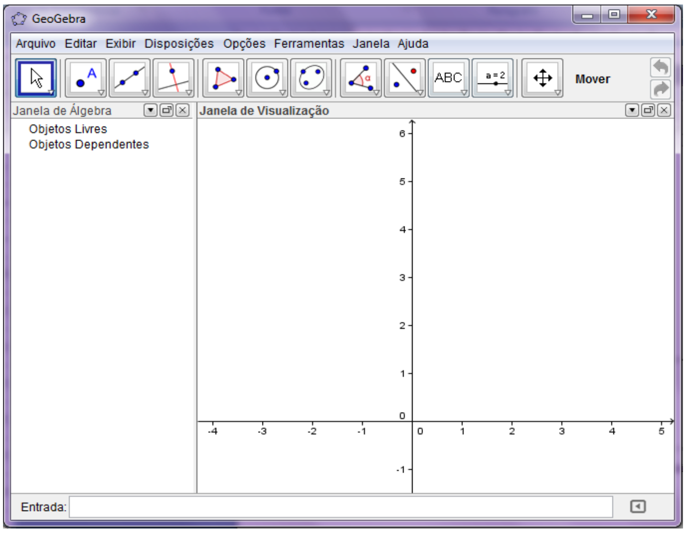


Figura 1: Interface do GeoGebra

3.1. Janela Geométrica

A janela geométrica, janela de visualização ou zona gráfica, mostra a representação gráfica de pontos, vetores, segmentos, polígonos, funções, retas e cônicas, que podem ser introduzidos diretamente na janela geométrica ou através da entrada de texto. Ao passar o mouse sobre algum desses objetos, aparece sua respectiva descrição.

* **Barra de Menus:** A *Barra de menus* fica na parte superior da zona gráfica, e é composta pelas opções: *Arquivo, Editar, Exibir, Disposições, Opções, Ferramentas, Janela* e *Ajuda*.

* **Barra de Ferramentas:** A *Barra de Ferramentas*, onde se encontram as ferramentas que auxiliam na construção dos objetos matemáticos. Ao selecionar

uma destas ferramentas, uma breve descrição sobre seu uso aparecerá à direita da barra de ferramentas.

* **Personalizando a Janela de Visualização:** Para personalizar a janela de visualização, basta clicar com o botão direito do mouse sobre a janela geométrica e em seguida no item Janela de Visualização. Além de personalizar os eixos coordenados e a malha, podemos, por exemplo, alterar o estilo da linha, as unidades e a cor dos eixos coordenados, e a cor de fundo. Note que também podemos personalizar cada um dos eixos individualmente, clicando em "*EixoX*" ou "*EixoY*". Além disso, podemos alterar a cor e o estilo das linhas da *malha*, e alterar a distância entre as linhas.

* **Observação:** Utilizando o *menu Exibir*, podemos personalizar a interface do Programa, podendo-se, por exemplo, exibir/esconder diferentes elementos da mesma, como por exemplo, a janela algébrica, a barra de ferramentas, os eixos coordenados, a malha, entre outras opções. Para isso, basta marcar/desmarcar o item desejado no *menu exibir*.

Figura 2: Menu Exibir

3.2. Janela Algébrica

A janela algébrica mostra informações como valores, coordenadas ou equações de objetos livres ou dependentes que podem (ou não) estar visíveis na zona gráfica. Através da janela algébrica (ou da janela geométrica) podemos, também, *renomear*, alterar as *propriedades* (no caso dos objetos livres) e/ou *exibir/esconder* um objeto da zona gráfica.

3.3. Campo de Entrada de Texto

O campo de entrada de texto (ou entrada de comandos) é usado para inserir comandos, coordenadas, equações e funções diretamente através do teclado.

* **Menu de Comandos:** Para facilitar a inserção de comandos no campo de entrada, podemos utilizar a ferramenta 'Ajuda', localizada no canto inferior direito, ao lado do campo de entrada. Esta ferramenta dispõe de um *menu de comandos* com informações para as seguintes opções: *Funções Matemáticas, Todos os Comandos, Álgebra, Cônicas, Diagramas, Estatística, Funções e Cálculo, GeoGebra, Geometria, Listas, Lógica, Matemática Discreta, Otimização, Planilha, Probabilidade, Programação, Texto, Transformações, e Vetores e Matrizes*. Deste modo, ao selecionar um desses itens, aparecerá uma caixa de texto com as instruções necessárias para a utilização do comando desejado.

* **Menu de Símbolos:** O menu de símbolos está localizado no canto direito do campo de entrada de texto, e dispõe de alguns dos símbolos matemáticos mais freqüentemente utilizados para nomear um objeto ou inserir um comando através do campo de entrada.

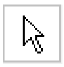
3.4. Barra de Ferramentas

A *Barra de Ferramentas* do GeoGebra está dividida em 12 janelas, como vemos a seguir.

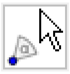
Figura 3: Barra de Ferramentas

Cada uma destas janelas possui várias ferramentas. Para visualizar estas ferramentas, basta clicar sobre a seta no canto do ícone, e então irão aparecer as opções referentes à estas janelas. Algumas destas ferramentas serão descritas a seguir.

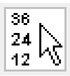
3.4.1. Ferramentas da Janela 1



Mover: Esta ferramenta é utilizada para arrastar e mover objetos livres. Ao selecionar um objeto no modo *Mover*, pode-se apagar o objeto pressionando a tecla *DELETE*, ou então movê-lo usando o mouse ou as setas do teclado. Também é possível ativar a ferramenta *Mover* pressionando a tecla *ESC*.

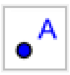


Rotação em Torno de um Ponto: Selecione primeiro o ponto que será o centro da rotação. Depois, você pode rodar objetos livres em torno desse centro, arrastando-os com o mouse. Note que, a distância entre os dois objetos permanecerá a mesma.

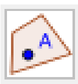


Gravar para planilha de Cálculos: Após selecionar diversos objetos na Janela de Visualização, é possível transportar estas informações para a planilha de cálculos. Além disso, você pode gravar na planilha de Cálculos as alterações e variações dos valores de determinados objetos conforme estes forem sendo modificados.

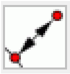
3.4.2. Ferramentas da Janela 2



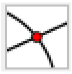
Novo Ponto: Para criar um novo ponto, selecione esta ferramenta e em seguida clique na janela geométrica. Clicando em um segmento, reta, polígono, cônica, gráfico de função ou curva, você pode criar um ponto nesse objeto. Clicando na interseção de duas linhas cria-se um ponto de interseção.



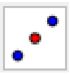
Ponto em Objeto: Esta ferramenta permite criar um ponto dependente de um objeto. O ponto criado só poderá ser movido dentro do objeto. Além do mais. Ao mover o objeto o ponto criado também se moverá. No caso de um polígono, Para criar um ponto que é fixado a um objeto, clique no botão da ferramenta e depois no objeto. Este novo ponto pode ser movido através da ferramenta *Mover*, mas apenas dentro do objeto. Para colocar um ponto interior de um círculo ou elipse será necessário aumentar a opacidade (transparência) destes. Se você clicar no perímetro de um objeto (por exemplo: círculo, elipse, polígono), então o ponto será fixado ao perímetro ao invés do interior.



Vincular/Desvincular Ponto: Para anexar um ponto a um determinado objeto, primeiro clique em um ponto livre e, em seguida, sobre o objeto para o qual você deseja anexar este ponto. O ponto se tornará dependente e só poderá ser movido dentro do objeto.

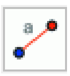


Intersecção de Dois Objetos: Os pontos de intersecção de dois objetos podem ser criados selecionando dois objetos, assim todos os pontos de intersecção serão criados; ou então, clicando-se diretamente sobre uma intersecção de duas linhas, assim apenas um ponto de intersecção será criado.

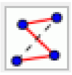


Ponto Médio ou Centro: Com esta ferramenta pode-se obter o ponto médio entre dois pontos ou de um segmento. Para isso, basta selecionar a ferramenta, e em seguida clicar em dois pontos ou em um segmento para obter o respectivo ponto médio. Também pode-se clicar numa secção cônica (por exemplo, circunferência) para criar o respectivo centro.

3.4.3. Ferramentas da Janela 3

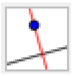


Segmento com Comprimento Fixo: Clique num ponto A (que será o extremo inicial do segmento), e em seguida, especifique o comprimento desejado no campo de texto da janela de diálogo que irá aparecer. Será criado um segmento com o comprimento desejado e extremos A e B, o qual poderá ser rodado em torno do ponto inicial A utilizando a ferramenta *Mover*.

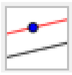


Caminho Poligonal: Com esta ferramenta pode-se criar uma linha poligonal, selecionando-se todos os pontos (vértices) desejados. A linha poligonal criada será fechada ao clicar novamente no vértice inicial.

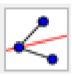
3.4.4. Ferramentas da Janela 4



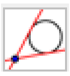
Reta Perpendicular: Com esta ferramenta, pode-se construir uma reta perpendicular a uma reta, semi-reta, segmento, vetor, eixo ou lado de um polígono. Assim, para se criar uma perpendicular, deve-se clicar sobre um ponto e sobre uma direção, que poderá ser definida por qualquer um dos objetos citados anteriormente.



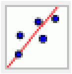
Reta Paralela: Utilizando esta ferramenta, pode-se construir uma reta paralela a uma reta, semi-reta, segmento, vetor, eixo ou lado de um polígono. Para criar a reta paralela, basta clicar sobre um ponto e sobre uma direção, que poderá ser definida por qualquer um dos objetos recentemente citados.



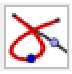
Bissetriz: Através desta ferramenta, podemos definir uma bissetriz selecionando três pontos A, B e C, obtendo-se assim a bissetriz do ângulo ABC; ou então selecionando-se duas retas, semi-retas vetores, ou segmentos de reta. Neste caso, serão determinados todos os ângulos existentes entre o par de objetos utilizado.



Reta Tangente: Com esta ferramenta, pode-se construir as retas tangentes a uma circunferência, cônica ou função, a partir de um determinado ponto. Para isso, deve-se clicar em um ponto e depois no objeto ao qual a reta (ou retas) será tangente.

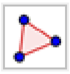


Reta de Regressão Linear: Com esta ferramenta, pode-se encontrar a reta que melhor se ajusta a um conjunto de pontos. Podemos fazer isso criando um retângulo de seleção que contenha todos os pontos desejados, ou então selecionando uma lista de pontos.

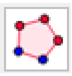


Lugar Geométrico: Esta ferramenta constrói automaticamente o lugar geométrico determinado pelo movimento de um objeto (ponto, reta, etc) ao longo de uma trajetória.

3.4.5. Ferramentas da Janela 5

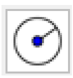


Polígono: Com esta ferramenta, pode-se construir um polígono irregular com a quantidade de lados desejada. Para isso, selecione sucessivamente pelo menos três pontos, os quais serão os vértices do polígono, e depois clique no ponto inicial para fechar o polígono. Note que, a área do polígono construído será mostrada na janela de álgebra.

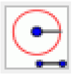


Polígono regular: Com esta ferramenta, pode-se construir um polígono regular a partir de um lado. Selecione dois pontos A e B e especifique o número total de vértices no campo de texto da janela de diálogo que aparece. Isto dá-lhe um polígono regular com ***n*** vértices (incluindo A e B).

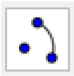
3.4.6. Ferramentas da Janela 6



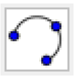
Círculo dados Centro e Raio: Com esta ferramenta, podemos construir um circulo a partir de centro e com comprimento de raio definidos. Para isso, basta clicar na tela (ou em um ponto), para definir o centro da circunferência. Em seguida, aparecerá uma caixa na tela, solicitando a medida do comprimento do raio. Digite o comprimento desejado e aperte Enter ou clique OK.



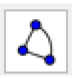
Compasso: Esta ferramenta permite fazer transporte de medidas, ou seja, possui função semelhante à de um compasso. Para usar esta ferramenta, basta clicar em dois pontos (o que seria equivalente a abrir o compasso na medida deste segmento) e depois em um terceiro ponto, para onde se quer transportar a medida selecionada.



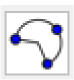
Arco circular dados centro e dois pontos: Para construir um arco circular a partir de um centro e dois pontos, é preciso criar um ponto ou então clicar sobre um ponto já existente (o qual será o centro do arco circular); e em seguida clique em mais dois pontos. Se o sentido dos cliques for anti-horário o arco construído será o menor arco definido pelos 3 pontos. Se for no sentido horário, será construído o maior arco.



Arco Circular Definido por Três Pontos: Esta ferramenta constrói um arco a partir de três pontos que podem (ou não) já estar na janela de visualização. Se os pontos não estiverem na janela de visualização, basta criá-los com a ferramenta ativada. Se já estiverem, ativar a ferramenta e em seguida selecionar os pontos.

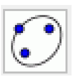


Setor circular dados o centro e dois pontos: Esta ferramenta constrói um setor circular a partir do centro e dois pontos. Para utilizá-la, clique inicialmente sobre o ponto que será o centro do arco, e em seguida clique sobre os dois pontos restantes. Se o sentido dos cliques for anti-horário, será construído o menor setor definido pelos três pontos. Se for no sentido horário, será construído o maior setor.

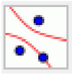


Setor circular definido por três pontos: Para utilizar esta ferramenta, basta clicar em três pontos que podem (ou não) já estar na janela geométrica. Se os pontos não estiverem na janela de visualização, basta criá-los com a ferramenta ativada.

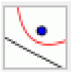
3.4.7. Ferramentas da Janela 7



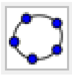
Elipse: Para construir uma elipse, basta selecionar dois pontos (que serão os focos da elipse), e em seguida selecionar um terceiro ponto, o qual pertencerá à elipse.



Hipérbole: Para criar uma hipérbole, basta selecionar dois pontos (que serão os focos da hipérbole). Em seguida, especifique um terceiro ponto, o qual pertencerá à hipérbole.

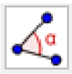


Parábola: Para construir uma parábola, basta selecionar um ponto (que pertencerá à parábola) e uma reta, a qual será a diretriz da parábola.

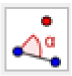


Cônica definida por cinco pontos: Após ativar esta ferramenta, selecionando-se cinco pontos, será criada a secção cônica que passa por estes pontos. Neste caso, a seção cônica mencionada poderá ser uma elipse, hipérbole, parábola ou circunferência. Note que, se quatro destes pontos forem colineares, a cônica não será criada.

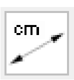
3.4.8. Ferramentas da Janela 8



Ângulo: Através desta ferramenta, podemos determinar um ângulo selecionando três pontos ou então selecionando duas retas, semi-retas vetores, ou segmentos de reta. Para determinar o ângulo entre os objetos selecionados, deve-se selecioná-los em ordem, no sentido horário. Pode-se, ainda, através desta ferramenta, se determinar todos os ângulos de um polígono, sendo ele regular ou não. Para isso, basta ativar a ferramenta e depois selecionar o polígono.

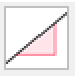


Ângulo com amplitude fixa: Com esta ferramenta, a partir de dois pontos, pode-se construir um ângulo com amplitude fixa. Para isso, deve-se clicar nos dois pontos iniciais, e então definir (na janela que se abrirá), a medida e o sentido (horário ou anti-horário) do ângulo que se deseja criar.



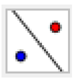
Distância, comprimento ou perímetro: Esta ferramenta fornece a distância entre dois pontos, duas retas, ou entre um ponto e uma reta, mostrando um texto dinâmico na janela de visualização. Além disso, também fornece o comprimento de um segmento, e o perímetro de um polígono, circunferência ou elipse.

Área: Esta ferramenta fornece o valor numérico da área de um polígono, círculo ou elipse, mostrando um texto dinâmico com o respectivo valor na janela de visualização.

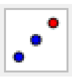


Inclinação: Esta ferramenta fornece o declive (inclinação) de uma reta, e mostra na janela de visualização um triângulo retângulo cuja razão entre a medida do cateto vertical e a medida do cateto horizontal é o valor absoluto da inclinação da respectiva reta.

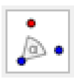
3.4.9. Ferramentas da Janela 9



Reflexão em Relação a uma reta: Esta ferramenta constrói o reflexo de um objeto (ponto, círculo, reta, polígono, etc.) em relação a uma reta. Para isso, deve-se selecionar primeiro o objeto, e depois a reta de reflexão.

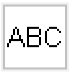


Reflexão em Relação a um ponto: Esta ferramenta constrói o reflexo de um objeto (ponto, círculo, reta polígono, etc.) em relação a um ponto. Para isso, deve se selecionar primeiro o objeto e, depois o ponto de reflexão.

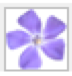


Rotação em Torno de um Ponto por um Ângulo: Com esta ferramenta, podemos construir o reflexo de um objeto ao redor de um ponto, em relação à um determinado ângulo. Para isso, selecione o objeto que pretende rodar, em seguida, clique num ponto para especificar o centro da rotação e, finalmente, insira a amplitude do ângulo da rotação na janela de diálogo que irá aparecer. Note que, ao alterar o objeto original, seu reflexo também será alterado. No entanto, o ângulo de rotação definido permanecerá o mesmo.

3.4.10. Ferramentas da Janela 10



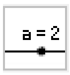
Inserir Texto: Com esta ferramenta podemos inserir textos estáticos, dinâmicos ou em LaTeX na janela de visualização. Para isso, deve-se, primeiramente, especificar a localização do texto clicando em um lugar vazio da janela geométrica; ou então clicar em um ponto, para que o texto criado fique anexado a esse ponto. Em seguida, aparecerá uma janela de diálogo onde pode-se inserir o tipo de texto pretendido. O **Texto Estático** não depende de nenhum objeto matemático e não é afetado por eventuais alterações na construção; o **Texto Dinâmico** contém valores de objetos que são automaticamente adaptados às alterações provocadas nesses objetos; e o **Texto Misto** é uma combinação dos anteriores. Além dos tipos de texto mencionados, também podemos inserir textos e fórmulas em LaTex. Para fazer isso, ative a caixa 'Fórmula LaTeX' na janela de diálogo da ferramenta Inserir Texto e insira o texto e as fórmulas desejados. Além disso, podemos selecionar as fórmulas e símbolos desejados clicando na seta ao lado de 'Fórmula LaTeX'.



Inserir Imagem: Com esta ferramenta, podemos inserir figuras na janela de visualização. Ao selecionar esta ferramenta e clicar na janela de visualização, abrirá uma caixa onde você poderá procurar a figura que deseja inserir na tela. Essa figura deverá estar no formato **jpg**, **gif**, **png** ou **tif**.

Inspetor de Funções: Esta ferramenta possibilita uma análise mais específica da função em determinado intervalo, tais como pontos de máximo e mínimo, integral, reta tangente, círculo osculador, etc.

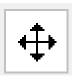
3.4.11. Ferrametas da Janela 11



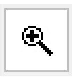
Controle Deslizante: Para criar um controle deslizante, basta ativar a respectiva ferramenta e clicar sobre o local desejado na janela geométrica. Feito isto, aparecerá uma janela onde você poderá nomear, especificar o intervalo e incremento e alterar as propriedades do controle deslizante. O uso de um controle deslizante possibilita causar variações em objetos (manualmente ou automaticamente), podendo também assumir a função de uma variável. Esta variável pode estar associada a um objeto matemático, o que permite a transição contínua entre estados intermediários do objeto estudado, destacando os aspectos invariantes. Além disso, a possibilidade de variar objetos garante o dinamismo nas representações e a manipulação de conceitos antes abstratos.

Caixa para Exibir/Esconder Objetos: Com esta ferramenta, podemos criar uma caixa e anexar a esta objetos já construídos. Desta forma, ao marcar a caixa, os objetos anexados ficarão visíveis, e ao desmarcá-la, os objetos serão ocultados.

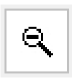
3.4.12. Ferramentas da Janela 12



Mover Janela de Visualização: Com esta ferramenta, pode-se mover o sistema de eixos, bem como todos os objetos nele contidos, ajustando a área visível na Janela de Visualização. Pode-se, também, alterar a relação de escala entre os eixos coordenados, arrastando cada um deles com o mouse.

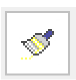


Ampliar: Com o auxílio desta ferramenta, ao clicar em qualquer lugar da janela de visualização, podemos ampliar a construção.

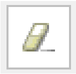


Reduzir: Utilizando esta ferramenta, ao clicar em qualquer lugar da janela de visualização, podemos reduzir a construção.

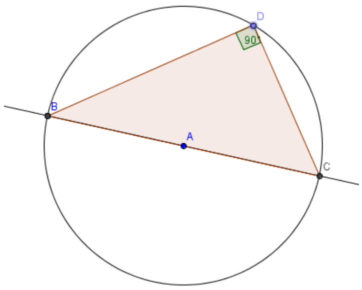
Exibir / Esconder rótulo: Com esta ferramenta, podemos ocultar os rótulos que estão visíveis nos objetos, além de poder exibir os rótulos que estão ocultos.



Copiar estilo visual: Esta ferramenta permite copiar propriedades visuais (como cor, tamanho, estilo da linha, entre outros) de um objeto para outro(s). Para fazê-lo, primeiro selecione o objeto cujas propriedades pretende copiar, e em seguida, clique nos objetos que herdarão estas propriedades.



Apagar Objeto: Com esta ferramenta, pode-se apagar qualquer objeto que esteja visível na janela geométrica e/ou algébrica. Caso apague um objeto acidentalmente, utilize o botão 'Desfazer'.

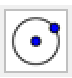


4. Noções de Geometria Plana

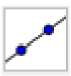
Agora, vamos realizar construções geométricas, utilizando algumas das ferramentas descritas anteriormente, para ilustrar e verificar alguns resultados da geometria plana.

4.1. Triângulo inscrito em uma semicircunferência

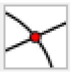
Processo de construção:



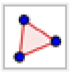
Ative a ferramenta *CIRCULO DADOS CENTRO E UM DE SEUS PONTOS* e clique em dois lugares distintos da janela de visualização para criar uma circunferência **c**. O centro será o ponto **A**, e **B** será um dos pontos da circunferência.



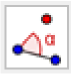
Ative a ferramenta *RETA DEFINIDA POR DOIS PONTOS* e crie uma reta que passe pelos pontos **A** e **B**.



Utilizando a ferramenta *INTERSEÇÃO DE DOIS OBJETOS*, marque o ponto **C** de interseção da reta com a circunferência. Em seguida crie um ponto **D** sobre a circunferência **c**. Pressione a tela ESC, e em seguida arraste o ponto recém criado. Ele deverá se movimentar apenas sobre a circunferência.



Ative a ferramenta *POLÍGONO* e clique nos pontos **B**, **C**, **D** e **B** (nesta ordem). Um polígono será criado.



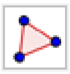
Ative a ferramenta *ÂNGULO* e clique seguidamente nos pontos **C**, **D** e **B** (nessa ordem). Ative a ferramenta *MOVER* e mova o ponto **D**. Note que a medida do ângulo $C\hat{D}B$ se mantém, mesmo movendo o ponto **D**.

4.2. Principais Pontos Notáveis de um Triângulo

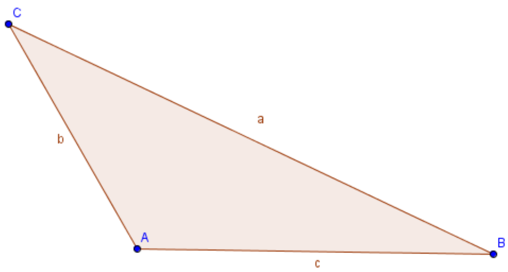
4.2.1. Incentro

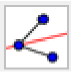
Dá-se o nome de incentro ao ponto de intersecção das bissetrizes de um triângulo. A seguir, vamos construir o incentro e verificar algumas propriedades.

Processo de Construção

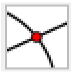


Ative a ferramenta *POLÍGONO* e clique em três lugares distintos para formar um triângulo. Para fechar o triângulo clique novamente no primeiro ponto. Obviamente, estes pontos não podem estar alinhados. Desta forma, um triângulo com vértices **A**, **B** e **C** será criado. Ative a ferramenta *EXIBIR/ESCONDER RÓTULO*.

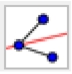




Ative a ferramenta *BISSETRIZ* e clique sobre os vértices: **A**, **C** e **B** (nesta ordem). Posteriormente sobre os vértices **C**, **B** e **A** (nesta ordem). Duas bissetrizes são criadas com os nomes **d** e **e**.

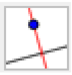


Ative a ferramenta *INTERSEÇÃO DE DOIS OBJETOS* e crie o ponto **D** de interseção das retas **d** e **e**.

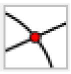


Ative a ferramenta *BISSETRIZ* e clique nos pontos **B**, **A** e **C** (nesta ordem). Acabamos de traçar a terceira bissetriz do triângulo **ABC**.

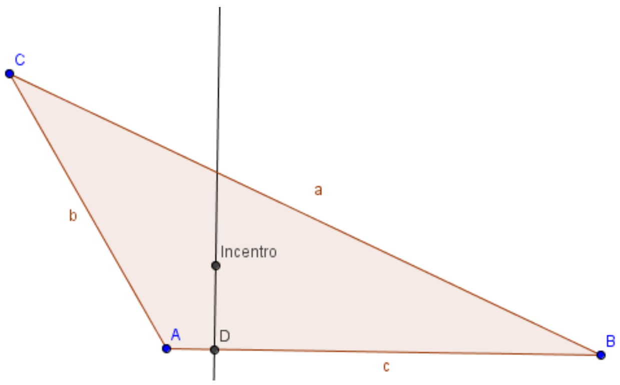
Ative a ferramenta *EXIBIR/ESCONDER OBJETO*, clique sobre as retas **d**, **e** e **f** e após pressione. Agora, vamos modificar o nome do ponto **D** para **Incentro**, clicando com o botão do lado direito do mouse sobre o ponto **D** e selecionando a opção RENOMEAR. Na nova janela que aparecerá, escreva **Incentro** e clique OK.



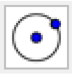
Ative a ferramenta *RETA PERPENDICULAR*, clique no ponto **Incentro** e no lado **c** do triângulo.



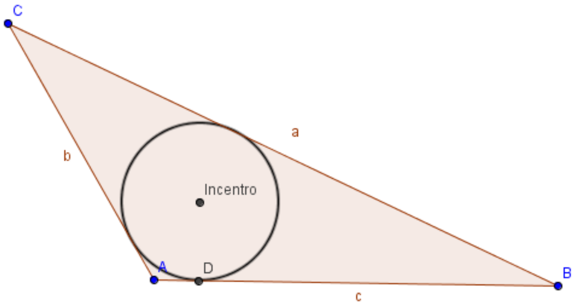
Ative a ferramenta *INTERSEÇÃO DE DOIS OBJETOS*, clique na reta **g** e, posteriormente, no lado **c** que liga os pontos **A** e **B**. Um ponto **D** será criado.



Como nos interessamos apenas no pé da perpendicular (ponto **D**), podemos esconder a reta **g**, usando a ferramenta *EXIBIR/ESCONDER OBJETO*. Feito isso, pressione a tela ESC.



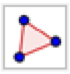
Ative a ferramenta *CIRCULO DADOS CENTRO E UM DE SEUA PONTOS*, clique no ponto **Incentro** e posteriormente no ponto **D**. Uma circunferência **h** será criada.



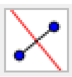
4.2.2. Circuncentro

Dá-se o nome de circuncentro ao ponto onde as mediatrizes dos lados de um triângulo se encontram.

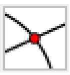
Processo de Construção



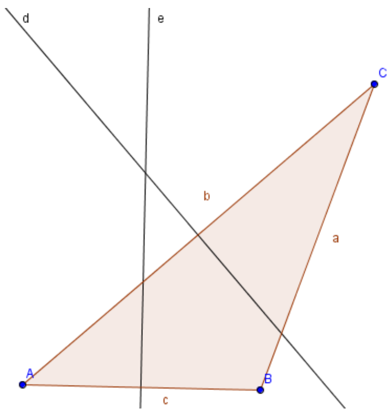
Ative a ferramenta *POLÍGONO* e clique em três lugares distintos para formar um triângulo. Para fechar o triângulo clique novamente no primeiro ponto. Obviamente, os pontos não podem estar alinhados. Um triângulo com vértices **A**, **B** e **C** será criado. Ative a ferramenta *EXIBIR/ESCONDER RÓTULO*.

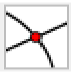


Ative a ferramenta *MEDIATRIZ*. Clique sobre o lado **c** para criar a reta **d**, e em seguida clique sobre o lado **b** para criar a reta **e**.

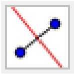


Selecione a ferramenta *INTERSEÇÃO DE DOIS OBJETOS* e clique sobre as retas **d** e **e**. O ponto **D** será criado.

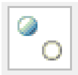




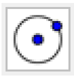
Ative a ferramenta *INTERSEÇÃO DE DOIS OBJETOS* e crie o ponto **D** de interseção das retas **d** e **e**.



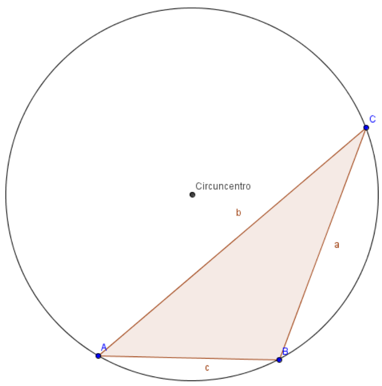
Selecione novamente a ferramenta *MEDIATRIZ* e clique sobre o lado **a** do triângulo para criar a reta **f**.



Ative a ferramenta *EXIBIR/ESCONDER OBJETO*, clique sobre as retas **d**, **e** e **f** e em seguida pressione. Agora, vamos modificar o nome do ponto **D** para **Circuncentro**, clicando com o botão do lado direito do mouse sobre o ponto **D** e selecionando a opção *renomear*. Na nova janela que aparecerá, escreva **Circuncentro** e clique OK.



Ative a ferramenta *CÍRCULO DADOS CENTRO E UM DE SEUS PONTOS*, clique no ponto **Incentro** e posteriormente no ponto **D**. Uma circunferência **h** será criada.



Exercício 1: Utilizando as ferramentas necessárias, faça as seguintes construções:

a) Construa com régua e compasso o ponto médio do segmento **AB**.

b) Construa com régua e compasso uma reta **s**, paralela a reta **r** e passando pelo ponto **A**.

c) Construa com régua e compasso, o triângulo **ABC**, sabendo que **BC**=a, **AC**=b e $\hat{C} = \gamma$.

d) Construa com régua e compasso, o triângulo **ABC**, sabendo que **BC**=a, **AC**=b e **AB**=c.

e) Seja **ABCD** um quadrilátero convexo qualquer. Mostre que os pontos médios de seus lados são os vértices de um paralelogramo.

4.2.3. Ortocentro

Dá-se o nome de ortocentro ao ponto de interseção das retas suportes das alturas de um triângulo.

4.2.4. Baricentro

Dá-se o nome de baricentro ao ponto de encontro das medianas dos lados de um triângulo. Lembrando que, chamamos de mediana o segmento de reta que une um vértice do triângulo ao ponto médio do lado oposto a ele.

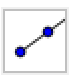
Exercício 2: Faça as construções do ORTOCENTRO e do BARICENTRO.

4.3. Construção da Bissetriz de um Ângulo

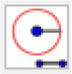
A bissetriz de um ângulo, por exemplo, **BÂC** (formado pelas semirretas AB e AC), é a semirreta AD tal que: BÂD ≡ CÂD. Para construir a bissetriz de um ângulo através do GeoGebra, basta selecionar a ferramenta *BISSETRIZ* e clicar sobre os três pontos que determinam o ângulo ou sobre as duas semirretas, retas, vetores ou segmentos que determinam o ângulo.

A seguir veremos como realizar a construção da bissetriz utilizando apenas as ferramentas *SEMIRRETA*, *INTERSECÇÃO DE DOIS OBJETOS* E *COMPASSO*.

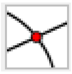
Processo de construção:



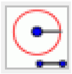
Selecione a ferramenta *SEMIRRETA* e construa duas semirretas **AB** e **AC**. Em seguida, crie um ponto **D** sobre a semi-reta **AB**.



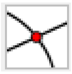
Acione a ferramenta *COMPASSO* e clique sobre os pontos **A** e **D**, determinando assim o raio **AD**. Feito isto, clique no ponto **A**, fazendo assim a construção da circunferência de centro **A** e raio **AD**.



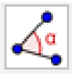
Utilizando a ferramenta *INTERSEÇÃO DE DOIS OBJETOS*, construa o ponto **E**, de interseção entre a circunferência e a semirreta **AC**.



Com a ferramenta *COMPASSO*, construa uma circunferência de raio qualquer e com centro em D. Em seguida, construa outra circunferência, com o mesmo raio da anterior e com centro em E.



Faça a intersecção das duas circunferências, achando os pontos F e G. Em seguida, construa a semirreta AF ≡ AG, que é a bissetriz do ângulo BÂC.



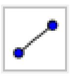
Feita a construção, determine os ângulos CÂF e BÂF e movimente os pontos B e C, verificando que sempre teremos CÂF ≡ BÂF.

Observação: para deixar a construção mais "limpa", podemos esconder as circunferências e pontos que não estão mais sendo utilizados. Para isso, basta ativar a ferramenta *EXIBIR/ESCONDER OBJETO* e clicar sobre os objetos que se quer esconder.

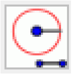
4.4. Construção de Triângulos

* **Triângulo Equilátero:** Um triângulo é dito equilátero quando seus três lados possuem a mesma medida.

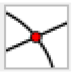
Processo de construção:



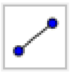
Construa um segmento **AB**, utilizando a ferramenta *SEGMENTO DEFINIDO POR DOIS PONTOS*.



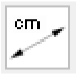
Utilizando a ferramenta *COMPASSO*, crie dois círculos de raio **AB**: um com centro em **A** e outro com centro em **B**.



Utilizando a ferramenta *INTERSEÇÃO DE DOIS OBJETOS*, defina os pontos de interseção entre as duas circunferências, chamando-os de **C** e **D**.



Com a ferramenta *SEGMENTO DEFINIDO POR DOIS PONTOS*, trace os segmentos **AC** e **BC**, construindo assim o triângulo equilátero **ABC**.



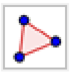
Para verificar que as medidas dos lados são iguais, ative a ferramenta *DISTÂNCIA, COMPRIMENTO OU PERÍMETRO* e clique sobre cada um dos lados do triângulo construído.

Exercício 3: Sabendo que um triângulo é **isósceles** quando dois de seus lados são congruentes, e **escaleno** se os três lados possuírem medidas diferentes; faça a construção destes triângulos.

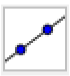
4.4.1. Altura e Área de um Triângulo

A altura de um triângulo é a distância entre um vértice e a reta suporte do lado oposto a esse vértice.

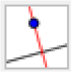
Processo de construção:



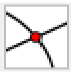
Com a ferramenta *POLÍGONO*, crie um triângulo **ABC** qualquer.



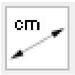
Agora, vamos construir a altura referente ao vértice **C**. Para isso, a ferramenta *RETA DEFINIDA POR DOIS PONTOS,* vamos traçar a reta que passa pelos pontos **A** e **B**. Note que a mesma será a reta suporte do lado **AB**



Com a ferramenta *RETA PERPENDICULAR,* crie a reta **s**, perpendicular a reta criada anteriormente e que passe pelo **C**.



Marque o ponto **D**, de intersecção entre a reta **s** e a reta suporte, usando a ferramenta *INTERSEÇÃO DE DOIS OBJETOS*. Note que o ponto **D** é o de pé da perpendicular (ou, neste caso, pé da altura).



Usando a ferramenta *DISTÂNCIA, COMPRIMENTO OU PERÍMETRO,* determine a medida do segmento **CD** (que é a altura referente ao lado **AB** ou ao vértice **C**), e também a medida do segmento **AB** (que é a base do triângulo **ABC**).

Veremos agora como usar a altura para calcular a área de um triângulo, dada pela fórmula:

$$\acute{A}rea = \frac{Base\ \times Altura}{2}$$

No *campo de entrada* digite: *Área=(distânciaCD*distânciaAB)/2*
Observe que o valor referente à área do triângulo aparecerá na janela de álgebra.

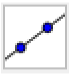
Também podemos obter a área do triângulo ativando através da ferramenta *área* e clicando sobre o polígono **ABC**. Note que ao mover os pontos **A**, **B** ou **C**, a área do triângulo também será alterada.

4.4.2. Teorema de Pitágoras

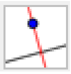
"O quadrado sobre a hipotenusa de um triângulo retângulo é igual à soma dos quadrados sobre os catetos."

O Teorema acima nos diz que, dado um triângulo retângulo **ABC**, com hipotenusa **a** e catetos **b** e **c**, temos $a^2 + b^2 = c^2$. Nosso próximo objetivo será realizar uma construção que nos ajude a compreender este teorema, sem sua demonstração formal, mas com o objetivo de visualizar através da construção que o teorema é válido.

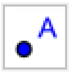
Processo de Construção:



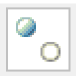
Com a ferramenta *reta DEFINIDA POR DOIS PONTOS*, crie uma reta **s**, que passe por dois pontos **A** e **B**.



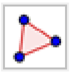
Selecione a ferramenta *RETA PERPENDICULAR* e crie uma reta que seja perpendicular à **s** e passe por **A**.



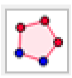
Com a ferramenta *NOVO PONTO*, crie um ponto **C**, que esteja sobre a reta perpendicular construída no passo anterior.



Usando a ferramenta *EXIBIR/ESCONDER OBJETO*, esconda as duas retas, deixando visíveis apenas os pontos **A**, **B** e **C**. Em seguida, pressione a tecla ESC.

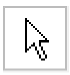


Selecione a ferramenta *POLÍGONO* e clique sobre os pontos **A**, **B**, **C** e **A** (nesta ordem), criando assim o triângulo **ABC**, retângulo em **A**.



Com a ferramenta *POLÍGONO REGULAR*, crie, sobre cada lado do triângulo, um quadrado com a medida do respectivo lado. Para isso, selecione a ferramenta *polígono regular* e clique sobre os pontos C e B, A e C e, por último, B e A.

Em seguida, clique sobre cada um dos quadrados construídos com o botão direito do mouse e selecione a opção *propriedades*. Do lado esquerdo da janela que abrirá, selecione *quadrilátero* e após, na guia *básico*, ative a opção *exibir rótulo* (selecione a opção *valor*).

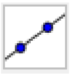


Esta construção geométrica é uma ilustração para o Teorema de Pitágoras. Agora movimente os pontos A, B e C e veja o que acontece com o valor de a^2 e $b^2 + c^2$.

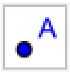
4.5. Construção de Trapézios

Trapézio é um quadrilátero que possui um par de lados opostos paralelos. Os lados paralelos são chamados de bases do trapézio, sendo elas: base maior e base menor, com relação à suas medidas.

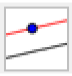
Processo de construção:



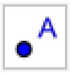
Ative a ferramenta *RETA DEFINIDA* por dois pontos e clique em dois lugares distintos da janela de visualização, criando assim a reta **AB**.



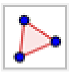
Utilizando a ferramenta *NOVO PONTO*, crie um ponto **C**, tal que **C** não pertença à reta **AB**.



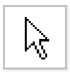
Com a ferramenta *RETA PARALELA* crie uma reta **r**, paralela à reta **AB** passando por **C**.



Crie, sobre **r**, dois pontos **D** e **E** distintos.



Utilizando a ferramenta *POLÍGONO*, crie o polígono **ABCDE**.

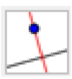


Mova os pontos da construção. Note que este polígono é um trapézio, pois, as bases **AB** e **DE** são paralelas.

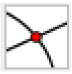
4.5.1. Altura do trapézio

A altura de um trapézio é a distância entre os dois lados paralelos.

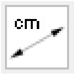
Processo de construção:



Utilizando o trapézio da construção anterior, ative a ferramenta *RETA PERPENDICULAR,* e crie uma reta **s**, perpendicular à reta **AB** passando por **D**.



Com a ferramenta *INTERSEÇÃO DE DOIS OBJETOS,* determine o ponto F, de intersecção entre a reta **AB** e a reta **s**. O segmento **DF** será a altura do trapézio.



Ative a ferramenta *DISTÂNCIA, COMPRIMENTO OU PERÍMETRO*. Clique sobre os pontos **D** e **F**. O valor que aparecerá representa a altura do trapézio.

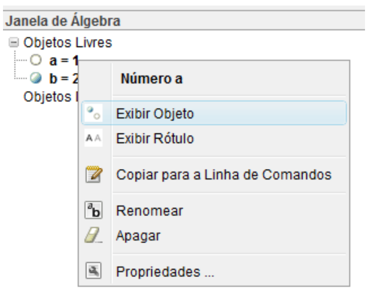
5. Funções

5.1. Funções Afins

Uma função afim é aquela que transforma um número real *x* em outro número real *y*, onde $y = ax + b$, para algum $a, b \in \mathbb{R}$ e $a \neq 0$.

Processo de Construção:

Usando o campo de entrada, atribua os valores desejados para os coeficientes *a* e *b* da função afim que queremos construir, e em seguida, digite a expressão $a * x + b$.



Clique com o botão direito do mouse sobre os coeficientes *a* e *b* que aparecem na janela de álgebra, e selecione a opção *Exibir Objeto*. Assim, dois *seletores* aparecerão na janela de visualização. Em seguida, Clique na ferramenta *Mover* e altere os valores dos coeficientes. Note que, ao alterar o valor do parâmetro, o gráfico da função sofre uma translação, e ao alterar o parâmetro *a*, alteramos o declive da reta.

Podemos também alterar as propriedades do gráfico da função, clicando sobre sua equação na janela de álgebra com o botão direito do mouse e selecionando a opção *propriedades*. Na guia *básico*, podemos modificar o nome da função além de sua forma de exibição e seu rótulo. Na guia *cor,* podemos alterar a cor do gráfico e na guia *estilo* podemos alterar a espessura e o estilo da linha.

Exercício: Plote e customize o gráfico da função $f(x) = \frac{2}{3}x + 3$.

Observações:

1. Para realizar a multiplicação, utilizamos o asterisco (*) ou então podemos substituí-lo por um espaço em branco.

2. Note que ao inserir uma função na entrada de texto, sua equação aparecerá na janela algébrica. Ao clicar com o botão direito do mouse sobre ela, podemos alterar a sua forma de exibição para paramétrica, implícita ou explícita.

5.1.1. Analisando uma Função Afim

- **Função restrita a um intervalo**

Para restringir uma função a um intervalo $[a, b]$, digitamos no campo de entrada:
Função[<Função>,<Valor de x Inicial>,<Valor de x Final>].
Após pressionar ENTER, o GeoGebra fornece a parte do gráfico da função compreendida entre o intervalo desejado.

- **Analisar se um ponto pertence ou não ao gráfico da função**

Podemos analisar se um ponto pertence ou não ao gráfico de uma função digitando no campo de entrada o comando Relação[<Objeto>,<Objeto]. Ao utilizar este comando, aparecerá uma janela com as informações da relação entre os dois objetos selecionados.

- **Zero da Função**

Podemos determinar a raiz de uma função em certo intervalo é através do comando *Raiz[<função>,<valor de x inicial>, <valor de x final>]*. Outra forma de obter os zeros de uma função é ativando a ferramenta *Interseção de dois objetos* e marcando a interseção da reta (gráfico da função) com o Eixo x.

Observação: Podemos também, alterar o rótulo do novo ponto, clicando sobre ele com o botão direito do mouse e selecionando a opção *renomear*. Selecionando a opção *propriedades,* na guia básico, podemos mudar o estilo do rótulo, alterando, por exemplo, para exibir o *nome* e *valor* do objeto selecionado.

- **Função crescente e decrescente**

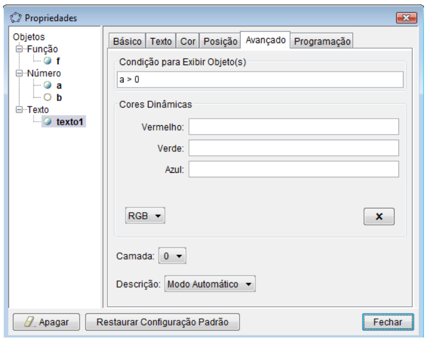
Uma função é crescente em um intervalo $[a, b]$ se $x_1 < x_2$ e $f(x_1) < f(x_2)$ para quaisquer x_1, x_2 pertencentes ao intervalo; e é decrescente se $x_1 < x_2$ e $f(x_1) > f(x_2)$ para quaisquer x_1, x_2 pertencentes a este intervalo.

Em outras palavras, uma função é crescente, se na medida em que aumentarmos o valor de x, então $f(x)$ também aumenta e, é decrescente se, na medida em que aumentarmos o valor de x, $f(x)$ diminui.

Processo de construção:

Inicialmente atribuímos valores para as variáveis a e b, através do campo de entrada. Logo após, inserimos a expressão $a * x + b$. Movimente o seletor de *a* e perceba a sua relação com o fato da função ser crescente (a>0), decrescente (a<0) ou constante (a=0).

Ative a ferramenta *Inserir texto*, e clique em algum lugar da janela de visualização onde queira que o texto apareça. Em seguida, escreva a palavra *CRESCENTE*. Ative novamente a ferramenta *Inserir texto* e abaixo da palavra que apareceu. Desta vez, escreva *DECRESCENTE*, e em seguida, repita o processo e escreva a palavra *CONSTANTE*, obtendo assim três textos.



Com o botão direito do mouse, clique com sobre o texto *CRESCENTE* e selecione a opção *propriedades*. Na janela que aparecerá, selecione o guia avançado, e escreva $a > 0$ no campo *condição para exibir objeto*.

Na coluna à esquerda, onde os objetos são exibidos, selecione o *TEXTO2*, que se refere ao texto *DECRESCENTE*, e no campo *condição para exibir objeto,* escreva $a < 0$.

Selecione agora a opção *TEXTO3*, referente ao texto *CONSTANTE*, e escreva no campo *condição para exibir objeto* o texto $a = 0$ e clique em fechar. Em seguida, varie o parâmetro *a* e verifique o que acontecerá.

- **Estudo do sinal da função afim**

Através do campo de entrada, atribua valores para *a* e *b*, e em seguida digite $a * x + b$. Para analisarmos para quais os valores de *x*, os valores da função serão positivos ou negativos, basta digitar no campo de entrada $f(x) < 0$, e então aparecerá na janela de visualização a área em que a função assume valores negativos, e $f(x) > 0$ para valores positivos.

Exercícios:

1. Em cada uma das funções abaixo determine o zero da função, e o ponto onde intercepta o eixo das ordenadas. Além disso, determine se a função é crescente ou decrescente, e em seguida faça um estudo do seu sinal.

a) $f(x) = -3x + 5$

b) $g(x) = 6x - 3$

c) $h(x) = -x + \frac{3}{4}$

5.2. Funções Quadráticas

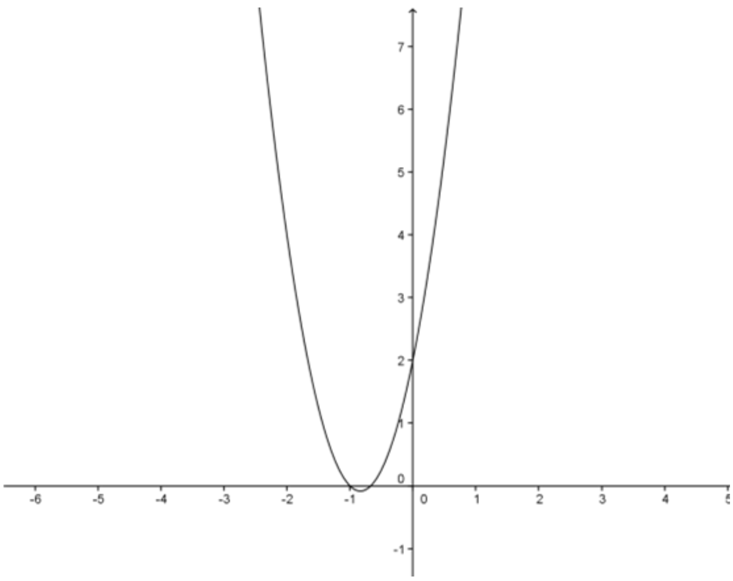
Uma função quadrática é aquela que transforma um número real *x* em outro número real y onde $y = ax^2 + bx + c$ para algum *a*, *b*, *c* $\in \mathbb{R}$ com $a \neq 0$. Trabalharemos com *a*, *b* e *c* sempre como constantes reais.

Processo de construção:

No campo de entrada, atribua valores para os coeficientes *a*, *b* e *c* da função quadrática que queremos analisar. Observe que na *janela de álgebra* aparecem os seus respectivos valores. Clique com o botão direito do mouse cada um dos coeficientes e marque a opção *exibir objetos*. Em seguida, digite no campo de entrada a expressão $a * x\text{^}2 + b * x + c$.

Exemplo: Plote o gráfico da função f(x) = $3x^2 + 5x + 2$.

Para isso, basta digitar a expressão 3x^2+5x+2 no campo de entrada e pressionar a tecla ENTER. O gráfico dessa função terá o seguinte aspecto:



Observações:

1. Para verificar o resultado da função em um determinado valor, devemos inserir no campo de entrada atribuímos ao x o valor desejado, digitando este no campo de entrada.

2. Para obtermos o valor da função em $x = 2$, digitamos no campo de entrada $f(2)$, assim, observamos que o respectivo valor da função aparecerá na janela de álgebra.

5.2.1. Analisando uma Função Quadrática

- **Relação entre o sinal do parâmetro "a" e a concavidade da Parábola**

Se o coeficiente *a* for positivo $(a > 0)$, dizemos que á parábola é convexa (concavidade voltada para cima), e se o coeficiente *a* for negativo $(a < 0)$, dizemos que a parábola é côncava (concavidade voltada para baixo).

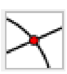
Processo de construção:

Usando a construção feita anteriormente, podemos observar a relação entre o sinal do parâmetro *a* e a concavidade da parábola. Inicialmente, na janela de álgebra, clique com o botão direito do mouse sobre o *a* e marque a opção *exibir objeto*. A seguir, selecione a ferramenta *mover* e modifique o valor do parâmetro *a* no seletor. Faça com que fique positivo e depois negativo, e observe a alteração na concavidade da parábola.

- **Raízes ou zeros da função quadrática**

O zero de uma função $y = f(x)$ é um número x_0 que faz com que $f(x_0)=0$. Do ponto de vista gráfico, este ponto $(x_0, 0)$ é o local onde o gráfico da função f intercepta o eixo x.

Processo de construção:



Ative a ferramenta *interseção de dois objetos* e marque a interseção da parábola (gráfico da função) com o Eixo X, clicando sobre os dois objetos. Os pontos serão rotulados automaticamente, (e podem ser renomeados); e suas coordenadas ficarão visíveis na janela de álgebra.

Podemos também obter as raízes da função quadrática f(x) digitando no campo de entrada: Raiz[f]. Se quisermos obter as raízes a partir de determinado valor, podemos utilizar o comando *Raiz[<Função,<Valor de x Inicial>]*, e se quisermos determinar as raízes em um intervalo utilizamos o comando Raiz[<Função>,<Valor de x Inicial>,<Valor de x Final>].

- **Relação entre o sinal de Δ e o número de raízes da função quadrática**

Denominamos de discriminante de uma função quadrática, o número $b^2 - 4ac$, que se representa pela letra grega Δ (lê-se delta).

Processo de construção:

No campo de entrada digite: delta= $b^2 - 4 * a * c$. Com isso, definimos uma variável "delta" que representa o valor numérico da expressão $b^2 - 4ac$. Observe que "delta=..." aparece na janela de álgebra. Podemos alterar o "delta" para Δ. Para isso, clique com o botão direito do mouse sobre o "delta" que está na janela de álgebra. Selecione *renomear* e após, na janela que se abrirá, procure na barra de rolagem o Δ. Depois, clique em OK.

Lembre que, a relação entre o sinal do delta e o número de raízes da função quadrática é a seguinte:

$\Delta < 0$ → Não existem raízes reais.

$\Delta > 0$ → As duas raízes são números reais e distintos.

$\Delta = 0$ → As duas raízes são números reais e iguais; ou seja, a função possui uma única raiz.

- **Vértice da parábola**

Definimos como vértice da parábola o ponto (x_v, y_v) onde a função atinge seu valor máximo ou mínimo se esta for côncava ou convexa, respectivamente.

Lembrando que $x_v = \frac{-b}{2a}$ e $y_v = -\frac{\Delta}{4a}$.

Processo de construção:

No campo de entrada, digite a expressão x_v=-b/(2*a), e em seguida, a expressão y_v= -Δ/(4*a). A seguir, digite no campo de entrada $V=(x_V,y_V)$. O ponto V que aparecerá na parábola é chamado de vértice, e podemos obter as suas coordenadas clicando com o botão direito do mouse sobre o ponto e alterando o estilo do rótulo para *nome* e *valor*.

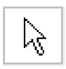
Para construir o eixo de simetria, construa a reta perpendicular ao eixo x passando pelo vértice da parábola digitando: $x=x_{V.}$

- **Estudo do sinal da função quadrática**

Estudar o sinal de uma função é dizer em quais intervalos esta função possui imagens positivas e em quais intervalos ela possui imagens negativas.

Processo de construção:

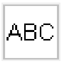
No *campo de entrada* atribua valores as variáveis a, b e c, digitando a equação a*x^2+b*x+c. Uma parábola será criada com o nome ''f(x)''.
Digite no campo de entrada: Ponto[EixoX]. Um ponto sobre o EixoX chamado "A" será criado.



Ative a opção *mover* e movimente o ponto A sobre o Eixo X. Digite no campo de entrada, *Raiz[f]* e, com isso, os pontos de interseção com o EixoX aparecerão. Eles serão os pontos B e C. Em seguida, digite no campo de entrada (x(A),f(x(A))). Um ponto D será criado sobre a parábola.
Digite no campo de entrada (0,f(x(A))). Um ponto E será criado sobre o Eixo Y, marcando a posição da imagem do número real ''x(A)''. Em seguida, digite *Segmento[A,D],* e após digite *Segmento[D,E]*.

Utilizando a opção *Propriedades,* altere o *estilo* da linha dos segmentos AD e DE para pontilhada. Para tal, clique com o botão direito do mouse sobre um desses segmentos e faça a alteração mencionada.

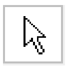
Em seguida, ative a ferramenta *COPIAR ESTILO VISUAL* e selecione o segmento com sua aparência modificada e após selecione o outro segmento.



Selecione a ferramenta *INSERIR TEXTO* e clique próximo ao ponto E, na janela de visualização. Na janela que aparecerá, escreva o texto *"IMAGEM POSITIVA"* e clique em OK. Selecione novamente a ferramenta *INSERIR TEXTO,* e clique novamente na janela de visualização. Agora, escreva o texto *"IMAGEM NEGATIVA"* e clique em OK.

Clique com o botão direito do mouse sobre o texto *"IMAGEM POSITIVA"* e selecione a opção *Propriedades*. Na janela que aparecerá, clique na guia *posição* e selecione o ponto ''E''. No guia *avançado,* escreva no campo *Condição para exibir objeto o* texto y(E)>0.

Selecione o *TEXTO2* na coluna da esquerda, referente ao texto *"IMAGEM NEGATIVA"*, e na guia *Posição,* selecione o ponto ''E'', e na guia *avançado,* escreva no campo *Condição para exibir objeto* o texto y(E)<0, e em seguida clique em *FECHAR*.



Ative a ferramenta *MOVER* e coloque o texto que criou na posição que achar mais adequada. Mova o ponto "A", e repare os momentos em que a imagem deixa de ser positiva e passa a ser negativa, e sua relação com as raízes da função.

Exercícios:

1. Em cada uma das funções quadráticas abaixo, plote o gráfico da função, determine as raízes da função, a sua concavidade e o seu vértice.

a) $f(x) = 3x^2 + 2x + 1$
b) $g(x) = -x^2 - 3x - 4$
c) $h(x) = 4x^2 - 4x + 1$
d) $i(x) = -x^2 + 5x - 3$

5.3. Funções Polinomiais

Uma função *f* é chamada de função polinomial se para um número *n*, inteiro e não negativo, temos: $f(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + a_{n-2}x^{n-2} + \ldots + a_2x^2 + a_1x^1 + a_0$.
Graficamente, as raízes reais de uma função são os pontos de interseção de seu gráfico com o eixo dos *x*. Desse modo, um polinômio de grau *n*, tem no máximo *n* interseções com o eixo *x*.

Através do campo de entrada podemos conhecer além das raízes, os extremos locais e ponto de inflexão de uma função polinomial, como veremos em seguida.

Exemplo: Vamos encontrar as raízes da função $x^3 - 2x^2 + 1$.

Inicialmente digite x^3-2x^2+1 no campo de entrada. A função será denominada f, e para sua melhor visualização iremos mudar o aspecto do seu gráfico através da opção *propriedades,* usando a guia *cor* alteramos a cor do gráfico para azul e a guia *estilo* aumentando a espessura da linha para 3.
Usando o comando Raiz[<Polinômio>] digitamos no campo de entrada Raiz[f] e pressionamos ENTER. Assim, surgirá no gráfico todas as raízes da função, denominados de A, B e C.

5.4. Funções Definidas por Partes

Para inserir uma função definida por partes, utilizamos o comando Se[<Condição>,<Então>,<Senão>].

Exemplo:

Plote o gráfico da função $f(x) = \begin{cases} sen(x), \ se\ x < 4 \\ \sqrt{x}, \ se\ x \geq 4 \end{cases}$.

Para plotar o gráfico desta função, basta inserir no campo de entrada o seguinte comando: Se[$x < 4$,$sin(x)$,$\sqrt{x}$].

Exercício: Plote o gráfico da função g(x)= $\begin{cases} cos(x), se\ x > 0 \\ 1 - x, se\ x \leq 0 \end{cases}$.

5.5. Alguns comandos e funções

Podemos inserir outras funções e operações pré-definidas como vemos na tabela a seguir:

Operação	Inserir
Fatorial	!
Raiz Quadrada	sqrt( )
Raiz Cúbica	cbrt( )
Função Exponencial	exp( ) ou e^x
Logaritmo Natural (base *e*)	ln( ) ou log( )
Logaritmo (base 2)	ld( )
Logaritmo (base 10)	lg( )
Cosseno	cos( )
Seno	sin( )
Tangente	tan( )
Secante	sec( )
Cossecante	cosec( )
Cotangente	cot( )
Arco-cosseno	acos( )
Arco-seno	asin( )

Arco-tangente	atan( )
Cosseno hiperbólico	cosh( )
Seno hiperbólico	sinh( )
Tangente hiperbólica	tanh( )
Secante hiperbólica	sech( )
Cossecante hiperbólica	cosech( )
Cotangente hiperbólica	coth( )
Arco-cosseno hiperbólico	acosh( )
Arco-seno hiperbólico	asinh( )
Arco-tangente hiperbólico	atanh( )

6. Derivação e Integração

6.1. Reta Tangente ao Gráfico de uma Função

Para traçar a reta tangente ao gráfico de uma função $f(x)$ em um determinado ponto, cuja abscissa mede $x = a$, devemos inserir no campo de entrada os seguintes comandos:

$f(x)$ = Função que se pretende utilizar

Número *a* = É o valor da abscissa no ponto *(a, f(a))*

P=(a,f(a)) = É o ponto de Tangencia da Reta

t=Tangente[<Valor de x>,<Função>] ou t=Tangente[<Ponto>,<Função>]

Exemplo:

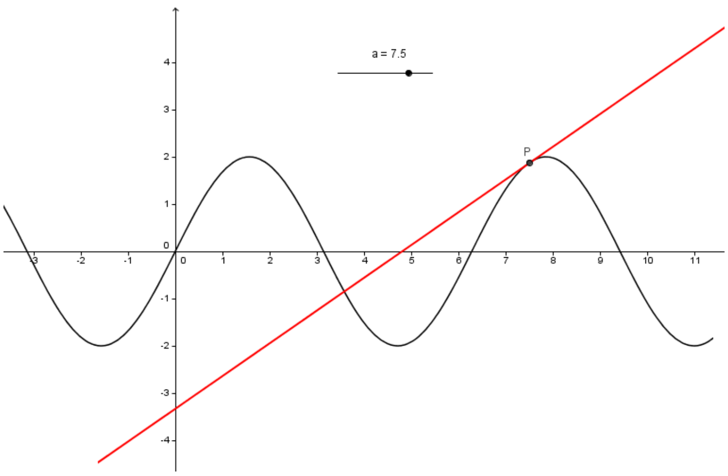
1. Trace a reta tangente à função $f(x) = 2\,sen(x)$ no ponto cuja abscissa vale 3.
Para encontrar a solução, devemos inserir os seguintes dados no campo de entrada:

$f(x) = 2 * \sin(x)$

$a = 3$

$P = (a, f(a))$

$t = Tangente[P, f]$



Observações:

1. Note que na janela de álgebra aparecerá o valor de *a*. Clique com o botão direito do mouse sobre o *a* e marque a opção *exibir objeto*. Assim, você poderá variar o valor de a e, conseqüentemente, a posição da reta tangente ao gráfico utilizando o *controle deslizante*, que aparecerá no canto superior esquerdo da janela geométrica.

2. Também podemos criar um *controle deslizante* para o valor a antes de inserir as demais informações no campo de entrada. Assim, poderemos alterar o intervalo, o incremento e as demais propriedades antes de construir a reta tangente.

3. Podemos calcular a inclinação da reta tangente utilizando a ferramenta *inclinação*, localizada na barra de ferramentas.

6.1.1. Animação da Reta Tangente

Para animar a reta tangente ao gráfico de uma função, deve-se clicar com o botão direito sobre o *controle deslizante*, selecionar a opção *Propriedades* e então, definir o intervalo, o incremento, a velocidade da animação e então, clicar em *fechar*. Em seguida, deve-se clicar com o botão direito sobre o *seletor* novamente e marcar a opção *animar*.

Exercício: Esboce o gráfico da função cosseno, e em seguida trace uma reta tangente ao gráfico passando pelo ponto cuja abscissa mede 1. Em seguida, customize os gráficos e anime a reta.

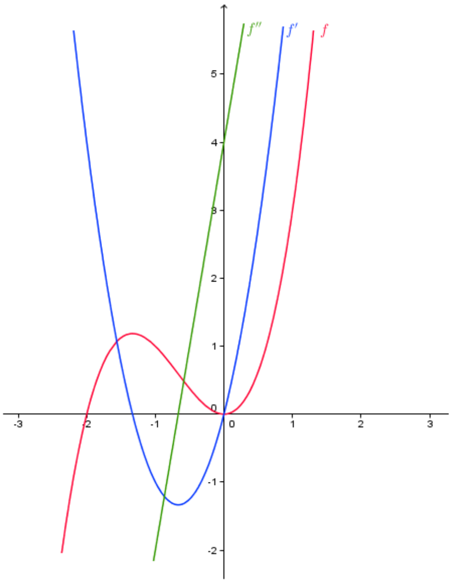
6.2. Derivada

Após inserir uma função no campo de entrada, podemos obter sua derivada através do comando, *Derivada[função f]*. Já para obter a n-ésima derivada de uma função, utilizamos o comando *Derivada[Função f, número n].*

Observação: Após inserir uma função no campo de entrada, também podemos obter a sua derivada escrevendo $f'(x)$. Para se obter a derivada segunda, escreve-se $f''(x)$; para a derivada terceira $f'''(x)$; e assim sucessivamente.

Exemplo:

1. Determine as derivadas primeira e segunda da função $f(x) = x^3 + 2x^2$, e esboce seus gráficos.



Primeiramente, devemos introduzir a função no campo de entrada, inserindo $f(x) = x^3 + 2 * x\char`^2$. Em seguida, calculamos as derivadas solicitadas através dos seguintes comandos:

* **Derivada Primeira:** $f'(x)$, de onde obteremos $f'(x) = 3x^2 + 4x$;

* **Derivada Segunda:** $f''(x)$, de onde obteremos $f''(x) = 6x + 4$.

Exercícios:

1. Dada a função f(x) $= \frac{x^{10}}{5}$, calcule suas derivadas primeira, segunda, terceira e quinta; e em seguida, customize os gráficos encontrados.

2. Derive as seguintes funções:

a) $f(x) = e^{2x} + \frac{1}{x}$

b) $g(x) = \ln(x+1) + \cos(x+1)$

c) $h(x) = \sqrt{x^2 + 5x}$

d) $i(x) = \cos^3(x)$

6.2.1. A derivada e a Reta tangente

Pela definição, sabemos que a derivada representa o coeficiente angular da reta tangente ao gráfico da função $y = f(x)$ em um determinado ponto. Desta forma, se quisermos saber o valor da derivada em algum ponto do gráfico de uma função, basta calcular o valor da inclinação da reta tangente ao gráfico neste ponto.

No caso da função $f(x) = 2sen(x)$, se quisermos saber $f'(5)$, podemos calcular a inclinação da reta no ponto cuja abscissa vale 5. Para isso, devemos alterar o valor de *a* para $a = 5$, e em seguida selecionar a ferramenta *inclinação* (na barra de menus) e depois a reta. Note que, o valor da inclinação (0,57) será o mesmo de $f'(5)$.

6.2.2. Pontos de Inflexão de uma Função Polinomial

Para encontrar o ponto de inflexão de um polinômio, basta inserir no campo de entrada o comando *PontoDeInflexão[<Polinômio>]*.

Os pontos de inflexão são, na verdade, os pontos onde a concavidade de uma determinada função muda; ou seja, é o ponto desta função onde a derivada segunda troca de sinal. Assim, funções polinomiais pares, não têm pontos de inflexão, pois não mudam de concavidade, enquanto funções polinomiais ímpares (a partir do grau 3) possuem ponto de inflexão.

6.2.3. Extremos Relativos de uma Função

Para obter os extremos relativos de uma função polinomial, utilizamos o comando *Extremo[<Polinômio>]*. Se quisermos obter os extremos de uma função em um determinado intervalo, utilizamos o comando *Extremo[<Função>,<Valor Inicial de x>,<Valor Final de x>*].

Para determinar os máximos e mínimos de um determinado intervalo de uma função, utilizamos os comandos *Máximo[<Função>,<Valor de x Inicial>,<Valor de x Final>]* e *Mínimo[<Função>,<Valor de x Inicial>,<Valor de x Final>]*.

Exemplo:

1. Dada a função $g(x) = x^4 - 4x$, encontre os extremos relativos, pontos de inflexão, e os máximos e mínimos no intervalo [-1,2].

Primeiramente, vamos inserir a função no campo de entrada, e em seguida vamos calcular os itens pedidos.

* PontoDeInflexão[g]=indefinido (a função g(x) não possui ponto de inflexão, pois é uma função par)
* Extremo$[g, -1{,}2]$ = $(1, -3)$
* Máximo$[g, -1{,}2]$ = $(-1{,}5)$
* Mínimo$[g, -1{,}2]$ = $(1, -3)$

Exercícios:

1. Encontre os máximos e mínimos relativos das funções abaixo, nos intervalos indicados:

a) $f(x) = x^8 + 9x^3 - 7x$, no intervalo $[-1, \frac{1}{2}]$

b) $h(x) = \ln(x+1) + \cos(x+2)$, no intervalo $[0{,}20]$

c) $g(x) = e^{x-1} + \ sen(x)$, no intervalo $[-6{,}1]$

2. Determine os pontos de inflexão das funções $p(x) = x^9 + 4x$ e $q(x) = \ x^6$.

6.3. Integração

6.3.1. Integral Indefinida

Uma função F′ é denominada integral indefinida (ou antiderivada) de uma função f num intervalo I se F′(x) = f(x) para todo x pertencente a I.

Para obtermos a integral indefinida de uma função, devemos inserir no campo de entrada, o comando *Integral[<Função>]*.

6.3.2. Integral Definida

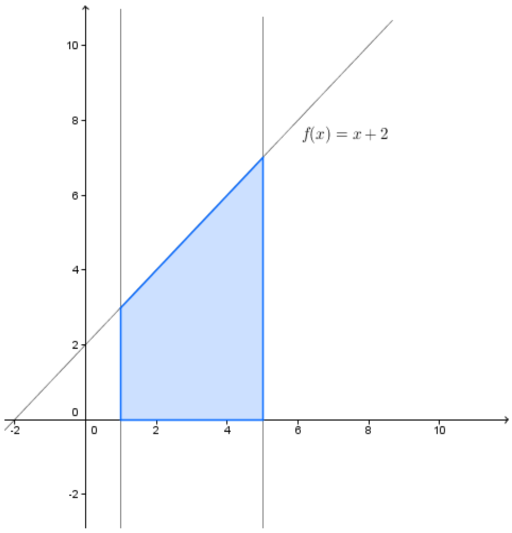
A integral definida consiste em realizar o cálculo da integral em um intervalo, por exemplo, dois pontos $x = a$ e $x = b$. Neste caso, o valor encontrado para a integral é numericamente igual ao valor da área delimitada pelo gráfico da função, pelas retas $x = a$ e $x = b$ e pelo eixo x.

O comando utilizado para a realização deste cálculo é *Integral[função f,número a, número b].*

Exemplos:

1. Calcule a área compreendida entre o eixo x, a função $f(x) = x + 2$ e as retas $x = 1$ e $x = 5$.

Primeiramente, vamos esboçar a região mencionada.



A área desta região pode ser representada através da seguinte integral definida:

$$\int_1^5 (x + 2)\, dx$$

Para calculá-la, devemos inserir *Integral[x+2,1,5]*, que nos dá como resposta o número 20.

Agora, utilizando a ferramenta *INTERSEÇÃO ENTRE DOIS OBJETOS*, defina os pontos A, B, C, D determinados pela interseção entre a ***reta a*** o eixo x, entre a ***reta a*** e $f(x)$, entre $f(x)$ e a **reta *b***, entre a **reta *b*** e o eixo x, respectivamente. Em seguida, utilizando a ferramenta *POLÍGONO*, construa o Polígono ABCD. Finalmente, com o auxílio da ferramenta *ÁREA*, determine a área do polígono construído. Note que, o valor da área do polígono formado pelas retas é igual ao valor da integral definida que acabamos de calcular.

2. Calcule $\int_0^{\pi} \sqrt{x^2+1}\,dx$.

Devemos inserir no campo de entrada Integral[$sqrt(x$^$2+1),0,\pi$], e então obteremos como resultado, o valor 6,11.

Exercício: Calcule as seguintes integrais:

a) $\int \sqrt{x^2+3}$

b) $\int \cos(2x+1) + \ln(x+2)$

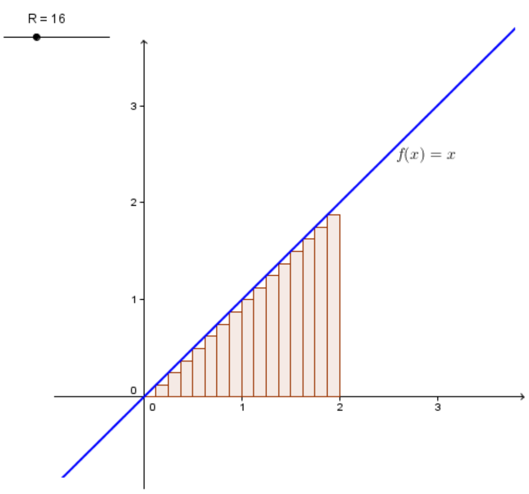
6.3.3. Somas de Riemann

A Soma de Riemann consiste em realizar o cálculo da integral de alguma curva em um intervalo, por exemplo, dois pontos x_1=a e x_2=b, através da partição deste intervalo em *n* subintervalos (retângulos). A partir do somatório das áreas dos retângulos encontrados, obteremos uma aproximação da área compreendida entre o gráfico da função e as retas $x = a$, $x = b$ e o *eixo x*.

Para calcular uma integral através da Soma de Riemann utilizamos o comando *SomaDeRiemannSuperior[<Função>,<Valor de x Inicial>,<Valor de x Final>, <Número de Retângulos>]* ou então *SomaDeRiemannInferior[<Função>, <Valor de x Inicial>,<Valor de x Final>,<Número de Retângulos>]*.

Exemplo:

1. Utilizando Soma de Riemann, calcule a área sob a curva $y = x$ no intervalo [0,2].



Inicialmente, vamos esboçar a região mencionada.

Pela fórmula $A = \frac{b.h}{2}$, sabemos que a área deste triângulo vale 2. Agora, vamos tentar uma aproximação deste valor através da Soma de Riemann.

Primeiro, vamos criar um *CONTROLE DESLIZANTE* R (que representará o número de Retângulos), com incremento 1, no intervalo de 0 à 50. Em seguida, devemos inserir o texto SomaDeRiemannSuperior$[f, 0{,}2, R]$ no campo de entrada. Note que podemos variar o número de retângulos através do controle deslizante. Observe também que, quanto maior é o valor de R, mais próximo de 2 estará o valor encontrado na Soma de Riemann.

Observações:

1. Note que podemos animar a construção realizada clicando com o botão direito do mouse sobre o *controle deslizante* e depois em *animar*.

2. Para encontrar o número exato da área de uma curva, basta definir o número de retângulos como sendo infinito. Por exemplo, para o caso anterior, devemos inserir no campo de entrada o texto SomaDeRiemannSuperior$[f, 0{,}2, \infty]$.

Exercício: Calcule, através da Soma de Riemann, a área das figuras compreendidas nos casos abaixo; criando um controle deslizante para o número de retângulos.

a) $f(x) = \sqrt{4 - x^2}$, no intervalo $[-2{,}2]$

b) $g(x) = x^2 + 2x$, no intervalo $[0{,}2]$

7. Referências:

ARAÚJO, L.C.L.; NÓBRIGA, J. C. C. **Aprendendo Matemática com o GeoGebra.** São Paulo: Editora Exato, 2010.