Uμa temática

Informativo PET Matemática
2015 - Ano 07 - Edição 19
Nova Proposta do Jornal e Atividades PET Matemática

Em Junho de 2009, o PET Matemática lançava o seu primeiro informativo, o jornal Uμa temática. Nesta primeira edição, foram relatadas algumas atividades desenvolvidas pelo Grupo, alguns artigos versando sobre diversos temas e uma entrevista realizada com um egresso. Com esta linha editorial, foram lançadas 18 edições nestes 6 primeiros anos, sendo 3 anuais.

O jornal é uma atividade bastante valorizada pelo Grupo pois, além das atividades desenvolvidas, permite divulgar os objetivos e filosofia do Programa de Educação Tutorial.

Desde a primeira edição do jornal, algumas parcerias estabelecidas com outros grupos foram de extrema importância para o crescimento de tal atividade como, por exemplo, os grupos PET Letras e PIBID Matemática.

Neste ano, o Grupo PET Matemática está reformulando o seu Informativo Uμa temática. A partir desta edição, teremos alguns textos que versarão sobre a ideia central contida em artigos de Matemática publicados em língua estrangeira, preferencialmente em inglês, e os demais artigos abordarão temas livres da escolha de cada petiano.

É importante ressaltar que, desde suas primeiras edições, o jornal sempre esteve aberto a publicações de acadêmicos e professores e, nesta nova fase, gostaríamos muito da participação de todos. Neste sentido, caso queira divulgar seu trabalho ou texto no jornal, entre em contato com algum integrante do Grupo.

O Jornal Uμa temática é uma das atividades de Ensino desenvolvida pelo PET Matemática, tendo como público alvo, principalmente, a comunidade acadêmica do CCNE. Além desta, outras atividades de ensino são desenvolvidas pelo Grupo. Destacamos os Minicursos, GA^2MA e ECOPET.

O ECOPET é uma atividade que trata sobre a Educação Ambiental e tem como público alvo toda a comunidade acadêmica da UFSM.

O GA^2MA, ofertado preferencialmente para os calouros de cada semestre, tem como objetivo auxiliar os mesmos no início da graduação. No início do segundo semestre de 2015, ofertaremos o minicurso "PET Revisa" que busca fazer uma retomada de conteúdos da educação básica, necessários para um bom desempenho nas disciplinas do Curso de Matemática.

A partir deste ano, os tradicionais Minicursos PET Matemática passarão a ser ofertados em ambos os semestres e com carga horária de 20 horas. A participação dos acadêmicos em minicursos é importante, pois isso irá auxiliá-los em diversas disciplinas do curso. No segundo semestre serão ofertados os minicursos *LaTeX: Produção e apresentação de textos científicos* e *Tópicos de Geometria e Cálculo com GeoGebra*.

O Grupo PET Matemática sente-se honrado em poder contribuir para a qualificação da formação de seus integrantes, bem como dos acadêmicos que se envolvem nas atividades. Venha crescer conosco.

Por que participar de eventos?

No cotidiano acadêmico, ouvimos muito que acontecerão eventos, científicos ou não, na própria Universidade ou fora dela, até mesmo eventos nacionais e internacionais. No entanto, é perceptível a baixa participação de graduandos em eventos fora da Universidade e até mesmo em eventos ofertados pelo curso, como a semana acadêmica e o ciclo de palestras. Mas afinal, qual é a importância da participação em eventos?

Um evento é todo e qualquer acontecimento previamente planejado e organizado de modo a contemplar uma parte considerável do público alvo num mesmo espaço físico e temporal. Os eventos são classificados em científicos, deliberativos, empresariais, dentre outros, pois cada tipo possui um objetivo, ou seja, um tema central para discussão.

Os eventos científicos são eventos de iniciativa das unidades de pesquisa e ensino das universidades. Ainda, esses podem ser denominados como: congresso, seminário, curso, palestra, feira, simpósio, fórum, conferência, jornada, ciclo de palestras, etc. Segundo Lacerda *et al*, esse tipo de evento tem como finalidade reunir profissionais e estudantes para a troca de informações, por isso constituem-se como fonte essencial na busca de novos conhecimentos.

Vamos elencar alguns dos pontos positivos da participação em eventos científicos para os acadêmicos.

- Inserção de acadêmicos no mercado de trabalho, pois eventos nacionais e internacionais são ótimos para construir novos relacionamentos. O fato do acadêmico estar próximo ao mercado de trabalho se torna um grande diferencial devido a gama de possibilidades que lhe são disponíveis;
- Oportunidade de se atualizar nos temas recentes relacionados ao curso e de conhecer novas áreas;
- Outro fator importante é que a participação em eventos contabiliza na carga horária de Atividades Complementares de Graduação (ACG). Aliado a essas horas, estão a convivência com outros cenários e realidades, o que se transforma em aprendizado para o nosso cotidiano;
- Nos eventos temos a oportunidade de "ouvir nossos livros falar". Quem nunca pensou como é determinado autor e como ele explica o que está escrito em seus livros? Ou, quem não quer conhecer pessoas importantes de sua área? Os eventos proporcionam isso;
- Momentos de discussões de acadêmicos com doutores sem levar em conta a hierarquia existente, mas objetivando somente a socialização de resultados obtidos;
- Considerável reforço no currículo, pois num único evento é possível obter certificado de participação, de apresentação de trabalhos e ainda a publicação do trabalho nos anais ou revista do evento.

Além desses fatores, os eventos servem para motivar os acadêmicos a fortalecer ou a começar uma iniciação cientifíca, bem como na socalização de resultados obtidos na mesma. E, para finalizar, todo evento tem determinados períodos livres, os quais são disponibilizados para o turismo dos participantes.

Referências:

FEITOSA, I. **A importância dos Congressos**. Disponível em: <http://administracao.mauriciodenassau.edu.br/a-importancia-dos-congressos-artigo-do-prof-inacio-feitosa/>

LACERDA, A. L. *et al'* **A importância dos Eventos Científicos na Formação Acadêmica: Esudantes de Biblioteconomia**. Disponível em: <http://revista.acbsc.org.br/racb/article/viewFile/553/678>

Ser professor: uma escolha de poucos

Se você comentar com alguém que está pensando em ser professor, geralmente você ouve algo do tipo: "Vai ser professor? Que coragem!", "Você é louco(a)?!", "Meus pêsames", etc. Isso ocorre pelo fato de não ser novidade para ninguém que os professores, além de mal remunerados, são desvalorizados.

Estudos comprovaram que a profissão docente não é considerada uma opção atraente pelos estudantes do Ensino Médio, e segundo pesquisas, só 2% deseja cursar Pedagogia ou Licenciaturas, o que é um dado preocupante para a Educação brasileira, pois cada vez menos jovens desejam seguir a carreira docente.

A maioria dos jovens estudantes reconhece a importância do trabalho de um professor, sabem que é um trabalho nobre, gratificante e de muita responsabilidade e que este é fundamental para a sociedade, porém quando o assunto é 'tornar-se um professor' esta maioria vira uma minoria. Quando os questionamos a respeito, a principal resposta é: o trabalho é mal remunerado e o docente é confrontado pelos alunos, esquecido pelo governo e desvalorizado pela sociedade. O que faz todo sentido, até porque em 2012, uma pesquisa internacional mostrou que, entre 21 países, o Brasil fica em penúltimo lugar em relação ao respeito e à valorização dos seus professores.

Estimativas da Organização das Nações Unidas para a Educação, a Ciência e a Cultura (Unesco) dão conta de que até o ano de 2030, serão necessários 8,4 milhões de professores no mundo para assegurar educação a todas as crianças do ensino primário e secundário, o que é um dado preocupante se levarmos em consideração a baixa procura das licenciaturas. Segundo cálculos do governo federal, o déficit é de 170 mil professores só na área de exatas, imagine a situação se considerarmos todas as áreas.

Mas afinal, porque os jovens não querem ser professores?

Bom, muitos acreditam que o motivo são os próprios professores, apontando o fato de que as licenciaturas não estão formando bons profissionais, e que dentro das universidades não recebem a atenção que deveriam ter. Outro fator que é usado como justificativa da atual crise é que há uma tendência (por parte dos estudantes) à negação da escola, pois ela tende a não reconhecer especificidades do jovem, fazendo com que o aluno não tenha interesse pelas aulas e pela profissão do professor.

Por outro lado, muitos acreditam que a profissão não é bem vista devido aos baixos salários, desvalorização social e más condições de trabalho. Como já citados anteriormente, esses são conjuntos de fatores que afastam a maioria dos alunos do curso de licenciatura. Além disso, é cada vez mais comum a violência contra professores na escola, como a violência verbal ou assédio moral. A partir disso, muitos professores desistem de suas carreiras e vão trabalhar em outras áreas, ou até mesmo entram em depressão ou sofrem de doenças ligadas ao estresse. Isso tudo assusta muito os jovens que pensam em fazer licenciatura.

É importante discutirmos as causas da má qualidade da Educação no Brasil e o fato de termos pouca procura nas licenciaturas. Porém, não podemos esquecer que professores bem remunerados e com menos alunos em sala têm condições de desenvolver um trabalho muito melhor, afinal, em países em que as condições de trabalho dos professores são boas, a qualidade da educação tende a ser melhor.

Referências:

Porque tão poucos querem ser professor. Disponível em: <http://www.fvc.org.br/pdf/atratividade-carreira.pdf>

¿Al final, qué es aprendizaje significativo?

Durante nossa formação acadêmica como futuros professores de matemática, somos apresentados a diferentes teorias de aprendizagem, com o intuito de aprendemos um pouco mais através das pesquisas destes estudiosos. David Ausubel, foi um psiquiatra que analisou o desenvolvimento, e a partir de sua experiência acabou por definir sua teoria: Aprendizagem Significativa.

Caracterizada pela interação entre o conhecimento prévio e novos conhecimentos, a aprendizagem significativa interage de maneira não autoritátia e substancial com o que o aprendiz já sabe. Nesse processo, o novo entendimento adquire um novo significado para o estudante e os conhecimentos pré-existentes assumem outra função, estes são chamados de subsunsores.

A aprendizagem significativa em que um novo conceito, mais vasto, passa a condicionar um conhecimento prévio damos o nome de Aprendizagem Significativa Superordinada. E Aprendizagem Significativa Subordinada, quando um conhecimento recém-adquirido obtem significada em um pré-existente.

As condições para que este processo de aprendizagem possa ocorrer pode ser dividido em duas partes:

1. O material de aprendizagem deve ser potencialmente significativo: livros, aplicativos, recursos tecnologicos devem se relacionar de maneira não arbitraria e não literal com as estruturas cognitivas do aprendiz;
2. O aluno deve apresentar uma prédisposição para aprender: os subsunsores devem estar claros na estrutura cognitiva do aprendiz para que se possa relacionar com o novo material. Ou seja, o aprendiz necessita possuir um conhecimento prévio, o qual possa ser relacionado com o novo conhecimento de forma não abusiva.

A construção dos primeiros subsunsores se dá através de processos de inferência, descobrimento, representação, etc., envolvidos de frequentes encontros do sujeito com o objeto de aprendizagem. Após este processo de descobrimento, o mediador (geralmente o professor) passa a intermediar os significados aceitos ou não pelo aprendiz.

Quando o aluno não possui subsunsores adequados para que se possa atribuir significados aos novos conhecimentos, a proposta de Ausebel para a solução é o que ele chamou de organizadores prévios. Estes podem ser perguntas, leituras introdutórias, situações-problema ou simulações. As possibilidades são muitas, mas independente da forma atribuída, deve ser clara, ampla e inclusiva.

Aprendizagem significativa não é uma teoria nova, e sim atual. Podemos dizer que toda aprendizagem passa a ser significativa quando as metodologias de ensino passam a ter um objeto de aprendizagem significativo.

Uma escola ou até mesmo uma universidade que não utiliza a aprendizagem significativa, ou seja, onde o aluno é ensinado de forma mecânica, tem a possibilidade de maiores índices de reprovações e desistências, já que o que foi decorado é fácil ser esquecido. Desta forma, a aprendizagem significativa vem em contra partida à aprendizagem mecânica, dando ênfase no entendimento.

Nas palavras do estudioso Moreira (1999)"portanto, a aprendizagem significativa é aquela na qual novos conhecimentos adquirem significados através da interação com conhecimentos já existentes na estrutura cognitiva do aprendiz."

Referências:

MOREIRA, M. **¿Al final, qué es aprendizaje significativo?**. Instituto de Física- UFRGS

Por tempos, nas livrarias e feiras de livro só eram encontrados livros ou revistas de colorir para o público infantil. No entanto, nos últimos anos uma nova mania vem crescendo na Europa e está ganhando espaço nas prateleiras das livrarias pelo mundo, são os livros de colorir para adultos. O primeiro exemplar foi criado pela ilustradora escocesa Johanna Basford que serviu de base para criação dos outros títulos e suas traduções para 15 idiomas.

No Reino Unido já foram vendidos mais de 250 mil exemplares e pelo mundo já passa de um milhão. Nos últimos meses essa febre chegou ao Brasil, sendo lançados pela editora Sextante, os livros ganharam os títulos de 'Jardim Secreto' e 'Floresta Encantada' e continuam com o sucesso, ficando esgotados em muitas livrarias brasileiras e chegando as primeiras posições do ranking dos livros mais vendidos, com mais de 100 mil exemplares.

Na cidade de Maringá, no estado do Paraná, são vendidos cerca de 300 exemplares por semana, superando o bestseller '50 Tons de Cinza'. Com o sucesso, autores e ilustradores pelo mundo entram no movimento e criam obras semelhantes que movimentam ainda mais o mercado.

As obras apresentam, a cada página, ilustrações de jardins e animais para colorir. Diferente dos livros para crianças, estes trazem desenhos mais complexos e detalhados. Alguns contêm também enigmas que os leitores devem decifrar.

Com a agitação da vida cotidiana nas cidades, que estão cada vez mais movimentadas, os leitores encontram nas "obras", velhos hábitos de quando criança, de pintar e colorir desenhos, uma válvula de escape para rotinas estressantes. Segundo apontam especialistas, o mecanismo antistresse acontece devido à produção de endorfina pelo corpo, acionada no instante em que as pessoas envolvem-se em atividades prazerosas. Isso traz benefícios, pois sabe-se que trabalhar com atividades manuais ou arte estimula a criatividade e a concentração.

"Quando o velho lápis e papel nos é oferecido, surge um momento que poderá trazer, além dos benefícios cognitivos mais claros (melhora da atenção, memória, percepção), um conforto e uma organização psíquica, na forma de relaxamento, calmaria e alívio das tensões", explica Bruna Rodrigues Maziero, coordenadora do curso de Terapia Ocupacional da Unifra, em entrevista ao jornal Diario de Santa Maria.

No entanto, embora causem uma sensação de bem-estar, os livros não devem ser encarados como terapia, são relaxantes porque ajudam a proporcionar um momento de concentração e podem funcionar como analgésico para situações de estresse, mas não são nenhuma solução milagrosa para resolver problemas como a ansiedade.

Em suma, fica a possibilidade de tirar o foco das telas dos celulares e computadores, utilizados em excesso hoje em dia e tão prejudiciais à saúde, desenvolvendo problemas psicológicos e para o corpo, principalmente para os olhos. Também o prazer em resgatar um passatempo de criança, muitas vezes perdido com o passar dos anos.

Referências:

Livro de colorir vira febre entre adultos e vende o dobro do último best-seller. Disponível em: <http://diariodesantamaria.clicrbs.com.br/rs/cultura-e-lazer/noticia/2015/04/nova-febre-do-mercado-literario-livros-de-colorir-para-adultos-4747306.html> Acesso em: 25 abr. 2015.

Nova febre do mercado literário: livros de colorir para adultos. Disponível em: <http://www.frizz.com.br/noticias/106243/livro-de-colorir-vira-febre-entre-adultos-e-vende-o-dobro-do-ultimo-best-seller.shtml> Acesso em: 25 abr. 2015.

Ilusão de óptica

A ilusão de óptica não é propriamente um conteúdo matemático, mas é um assunto de alto interesse para um estudioso da geometria. É interessante saber como poderá o nosso raciocínio interferir nas ilusões de óptica, pois estas ocorrem quando há um engano de sentidos ou da mente, que faz com que se interprete falsamente um fato ou um objeto.

Em algumas figuras de ilusões de óptica é difícil perceber o que existe. Já em outras, a figura não está presente, mas mesmo assim conseguimos vê-la. Esse tipo de ilusão envolve a percepção. A Percepção é o conjunto de processos pelos quais reconhecemos, organizamos e entendemos as sensações recebidas dos estímulos ambientais. Tente responder, observando atentamente a figura abaixo, qual das linhas é maior, a vertical ou a horizontal?

Fig. 4. — The vertical line appears longer than the equal horizontal line in each case.

Figura: Figura 1

Na figura 1, podemos cometer um equívoco à primeira vista, pois podemos afirmar que a linha vertical é maior que a horizontal. No entanto, se analisarmos atentamente a figura podemos visualizar que ambas as linhas possuem o mesmo comprimento, pois entre as linhas não há diferença de meio milímetro sequer.

São variadíssimas as ilusões inventadas pelos geômetras ou mesmo pelos artistas das obras de arte óptica. Há certas ilusões de ópticas que se tornam até irritantes para o observador, pois algumas delas mesmo olhando diversas vezes continuam dando confusão, ou mesmo fazendo-nos pensar erroneamente.

A partir deste conhecimento, caro leitor, responda-me qual dos segmentos abaixo é maior:

Figura: Figura 2

Nos quatro ângulos apresentados, os vértices são unidos dois a dois por segmentos de reta, esses segmentos são iguais. No entanto parecem desiguais, pois o segmento traçado dentro das aberturas dos ângulos parece bem menor do que o outro.

Portanto, podemos concluir que as ilusões de óptica são meras confusões que nossa percepção faz sobre as imagens ou objetos apresentados, ou seja, a nossa visão é totalmente certa, mas o nosso raciocínio sendo inconsciente é, por vezes, totalmente errado.

Desafio ao leitor: qual circunferência central é maior?

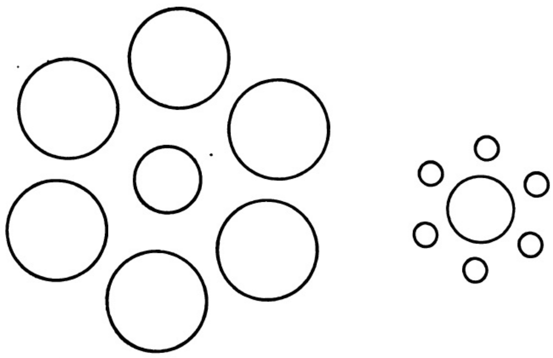

Fig. 17. — Equal circles which appear unequal due to contrast (Ebbinghaus' figure).

Figura: Figura 3

Referências:

LUCKIESH, M. **Visual Illusions**: their causes, characteristics and applications.New York: Dover Publications, 1965.

TAHAN, M. **As maravilhas da Matemática**.2ª. ed. Rio de Janeiro: Bloch Editores.

Sobre o ômega 3

Algum dia você ouviu falar em Ômega 3? Sabe o que é e qual sua funcionalidade? Sua resposta foi “não”? Então atente para o seguinte texto.

O ômega 3 ou óleo de peixe, como também é chamado, é considerado um ácido graxo essencial (é essencial pelo fato de nosso organismo não o produzir). Esses ácidos graxos são usados como energia para as células.

Existem três tipos de ácidos graxos: saturado, monoinsaturado e poli-insaturado. O ômega 3 é uma gordura poli-insaturada e representa uma família de ácidos graxos, dos quais os mais frequentes são: ácido alfa-linolênico, ácido eicosapentaenoico (EPA) e o ácido docosahexaenoico (DHA). O EPA e o DHA são encontrados especialmente em peixes, enquanto o ácido alfa-linolênico é de origem vegetal e pode ser convertido em DHA ou em EPA, é o caso da chia e da linhaça.

Essa gordura quando dentro do organismo tem por função elaborar a camada lipídica em torno da célula, agir na formação da bainha de mielina (um componente dos neurônios) e no recobrimento da retina ocular. Resumidamente, um dos maiores benefícios do ômega 3 está em proteger a saúde cardiovascular e cerebral. Além desses, confira a seguir outros benefícios desse óleo.

1. No coração: enquanto o EPA evita coágulos de sangue (que levam a um derrame ou infarto) e diminui os níveis de triglicerídeos, o DHA estabiliza a atividade elétrica no coração.
2. No cérebro: melhora o desempenho cognitivo, a atividade cerebral e a comunicação entre as células e o cérebro. Além disso, auxilia no aporte de oxigênio e nutrientes.
3. Na visão: auxilia no recobrimento da retina ocular, fazendo com que o cérebro realize o processo de enxergar.
4. Para o colesterol: provoca um aumento dos níveis do colesterol bom (HDL) e diminuição dos níveis de colesterol ruim (LDL).
5. Pressão arterial: garante a flexibilidade das veias e artérias, pois evita a formação de placas de gordura na parede das artérias.
6. Combate da depressão: melhora a fluidez das membranas que encapam as células nervosas e aumenta a produção de diversos neurotransmissores, responsáveis pelo humor e bem-estar da pessoa.
7. Artrite reumatoide: o ácido graxo também tem por função interromper a enzima que produz o processo inflamatório, auxiliando no tratamento de doença deste cunho.

A partir dos benefícios do ômega 3, e pelo fato de nosso organismo não o produzir, fica fácil perceber a importância de inserí-lo na dieta.

E, em quais alimentos você pode encontrá-lo?

Além de peixes ricos em gordura, o ômega 3 também pode ser encontrado em vegetais e em óleos vegetais. Ainda, na linhaça, chia, nozes e castanhas.

Como e com que frequência ingerí-lo?

Segundo informações médicas e nutricionais, o consumo de peixe duas vezes na semana está de bom tamanho, podendo ainda incluir à dieta outras fontes ricas em ômega 3. É importante salientar que o consumo de peixe não se dá por fritura, pois este acaba com as propriedades do ômega 3, além de ser prejudicial à saúde. Em últimos casos, pode-se fazer uso de ômega 3 a partir de encapsulados.

Referências:

Ômega 3: a gordura aliada do cérebro e do coração. Disponível em: <http://www.minhavida.com.br>

O que é um grupo? O dicionário nos diz que grupo é um conjunto de coisas ou pessoas que formam um todo; ou ainda, uma pequena associação ou reunião de pessoas com o mesmo objetivo. Mas, será que na álgebra um grupo tem o mesmo significado? Isso é o que tentaremos entender a partir de agora.

Um grupo é um importante objeto matemático. A definição dessa estrutura algébrica foge um pouco da definição de grupo do dicionário. Na álgebra, um grupo é um conjunto G que apresenta uma operação e satisfaz os seguintes axiomas:
$(i)\forall a, b, c \in G$, vale $(a*b)*c = a*(b*c)$;
$(ii)\exists e \in G$ tal que $e * a = a = a * e$;
(iii) para cada $a \in G$, $\exists a^{-1} \in G$ tal que $a * a^{-1} = e = a^{-1} * a$.

Dessa definição podemos observar algumas coisas. Primeiro, o axioma (i) nos diz que no conjunto G vale a associatividade. O axioma (ii) nos garante que existe um único elemento neutro. Vale ressaltar que este elemento não necessariamente será o número 1 ou o número zero. A escolha do elemento neutro depende do grupo em questão. E, o axioma (iii), nos garante que cada elemento de G possui inverso e que este também pertence ao conjunto G. O elemento inverso também é determinado de acordo com o grupo em questão.

Que coisa confusa né?! Primeiro um grupo era um conjunto de coisas ou pessoas. Depois virou um objeto matemático um tanto complexo. Objeto esse que satisfaz três "regras". Mas, vejamos um exemplo para facilitar as coisas: considere $(Z, +)$, onde Z é o conjunto dos números inteiros e $+$ é a soma usual de inteiros. Agora analisemos os três axiomas:
(i) Associatividade: Seja $a, b, c \in Z$. Assim, $(a+b)+c = a+b+c = a+(b+c)$. Como a, b, c são números inteiros, vale a associatividade.
(ii) Tome $e = 0$. De fato, $e = 0$ é o elemento neutro de $(Z, +)$ pois $a + 0 = a = 0 + a$, $\forall a \in Z$.
(iii) Tome $a^{-1} = -a$. Note que: $a + (-a) = 0 = (-a) + a$, $\forall a \in Z$. Assim, $a^{-1} = -a$ é o elemento inverso. Como os três axiomas são válidos, segue que $(Z, +)$ é um grupo. Fácil né?!

Entendido o que é um grupo, podemos partir para mais uma definição. Dizemos que um grupo $(G, *)$ é abeliano se vale a comutatividade, ou seja, $\forall a, b \in G$, $a*b = b*a$. Será que $(Z, +)$ é um grupo abeliano? Como vimos anteriormente, $(Z, +)$ é um grupo. Então, resta verificar se a comutatividade é válida. Como estamos manipulando números inteiros, sabemos que vale a comutatividade, isto é, $a + b = b + a$, $\forall a, b \in Z$. Logo, $(Z, +)$ é um grupo abeliano.

A partir disso, podemos nos aprofundar um pouco mais na Teoria de Grupos. Então, vamos falar sobre subgrupo. Seja S um subconjunto não vazio de um grupo G. Dizemos que S é um subgrupo de G se vale as seguintes afirmações:
$(i)e \in S$;
$(ii)a, b \in S \Rightarrow a * b \in S$;
$(iii)a \in S \Rightarrow a^{-1} \in S$.

Parece complicado, mas não é. Considere o grupo $(Z, +)$ e o subconjunto $S = 2Z$. Será que S é um subgrupo de $(Z, +)$? Note que $0 \in S$ pois $0 = 0 + 0 = 2.0$. Agora, tome $a, b \in S$. Então $a = 2x$ e $b = 2y$. Assim, $a + b = 2x + 2y = 2(x + y) \in S$. Como $a = 2x \in Z$ então $a^{-1} = -2x \in Z$. Assim, $a + a^{-1} = 2x - 2x = 2(x - x) \in S$. Logo, S é subgrupo de $(Z, +)$.

Bom, agora você já sabe o que é um grupo e conhece o básico sobre essa Teoria. É claro que existem muitos outros resultados envolvendo esse assunto. Mas deixemos isso para uma próxima...

Referências:

Group Theory. Disponível em: <http://www.jmilne.org/math/CourseNotes/gt.html>. Acesso em: 11 abril 2015.

Muito se conhece sobre o Teorema da Fatoração Única, também conhecido como Teorema Fundamental da Aritmética. Este, consiste em representar um número não-primo n através do produto das potências de seus fatores primos. Estes são determinados, tipicamente, a partir de sucessivas divisões inteiras de n e seus quocientes pela sequência crescente de números primos, até que o último quociente tenha valor 1.

Tomando-se como exemplo a fatoração do número 28, inicia-se o processo com a divisão pelo menor fator primo possível, no caso, $28/2 = 14$. Segue-se o processo com o mesmo fator, onde chega-se em $14/2 = 7$. Como último passo, chegamos ao valor 1 através da divisão $7/7 = 1$.

De certa forma, este algoritmo pode ser considerado eficiente, mas apenas quando o inteiro n é fatorável por números primos pequenos. Em casos onde n tem um valor maior e possui um fator primo que não é muito menor que $\sqrt{n}$, tem-se a opção de usar o método de fatoração proposto por Fermat.

Supondo que n é ímpar, o algoritmo é baseado na tentativa de achar números inteiros positivos x e y tais que $n = x^2 - y^2$. Expandindo, chega-se em: $n = (x+y)(x-y)$. Logo, $(x+y)$ e $(x-y)$ são fatores de n. Se r for um número real, então sua parte inteira será denotada por $[r]$. Por exemplo: $[\sqrt{102}] = 10$. Se r é inteiro, então $[r] = r$. O caso mais óbvio deste algoritmo, ocorre quando n é um quadrado perfeito, ou seja, quando existe algum número inteiro r tal que $n = r^2$. Neste caso, r é fator de n, $x = r$ e $y = 0$. Mas nem sempre isso ocorre, pois quando $y > 0$ tem-se que: $x = \sqrt{(n + y^2)} > \sqrt{n}$.

Então, para encontrar os valores de x e y, deve-se seguir alguns passos, que são denominados por Algoritmo de Fermat. O valor de entrada deve ser um inteiro positivo ímpar n e como saída deve-se obter um fator de n ou um indicativo de que n é primo.

Na primeira etapa, será efetuado o cálculo do valor de x, de forma que $x = [\sqrt{n}]$; se $n = x^2$, então x é fator de n e pode-se parar por aí (Primeiro caso, o mais simples!). A segunda etapa é feita como condição contrária ao caso da igualdade de n e x^2. Consiste em incrementar x em uma unidade e calcular $y = \sqrt{(x^2 - n)}$.

Na terceira etapa, repetimos o processo anterior até que um valor inteiro para y seja encontrado, ou até que x seja igual a $(n+1)/2$. No primeiro caso n tem fatores $(x+y)$ e $(x-y)$, já no segundo, n é primo.

O funcionamento do algoritmo fica mais claro ao ser efetuado um exemplo numérico. Se $n = 1342127$ (número que deve ser fatorado), atribui-se à variável x o valor da parte inteira da raiz quadrada de n, que neste caso vale $x = 1158$. Mas como $x^2 = 1158^2 = 1340964 < 1342127$, logo x deve ser incrementado de unidade em unidade, até que $\sqrt{(x^2 - n)}$ seja um número inteiro ou que x seja igual a $(n+1)/2$.

Para deixar o processo mais didático, vamos adotar que $y = \sqrt{(x^2 - n)}$. Quando x vale 1159, y vale $33,97$. Quando x vale 1160, y vale $58,93$, e assim sucessivamente, até que $x = 1164$ e $y = 113$. Assim, com seis repetições, obteve-se um valor inteiro. Logo $x = 1164$ e $y = 113$, com fatores correspondentes $(x+y) = 1277$ e $(x-y) = 1051$.

Dessa forma, apresentou-se um algoritmo de eficiência considerável para o cálculo de fatores primos e que reduz o número de iterações em relação ao método tradicional de fatoração.

Referências:

COUTINHO, S.C.; **Números inteiros e criptografia RSA**. IMPA/SBM,1997.

Sobre o Desacoplamento das Equações de Movimento de um Sistema Giroscópico Linear - PARTE I

Este texto, assim como o próximo, pretende compartilhar as principais ideias contidas no artigo "*Citerion for Decoupling Dynamics Equations of Linear Gyroscopic Systems*", publicado por M. Liu e J.M. Wilson como uma nota técnica no AIAA Journal, Vol.30, No 12. Na introdução, os autores ressaltam a importância de se considerar, nas equações de movimento, os efeitos do amortecimento. Além disso, mediante uma transformação matricial de coordenadas, transformam um sistema com amortecimento em um sistema sem amortecimento. São obtidas condições necessárias e suficientes para realizar a referida transformação.

As equações de movimento para os estudos de vibrações, com pequenas amplitudes, podem ser obtidas pela 2ª Lei de Newton e tomam a forma

$$\mathbf{M}\ddot{\mathbf{X}} + \mathbf{C}\dot{\mathbf{X}} + \mathbf{K}\mathbf{X} = f(t) \tag{1}$$

onde $\mathbf{M}$, $\mathbf{C}$ e $\mathbf{K}$ são matrizes quadradas de ordem n, conhecidas na literatura como, matriz de massa, de amortecimento e de rigidez, respectivamente. A função $f(t)$ contempla a ação das forças externas agindo no sistema.

Supondo $\mathbf{M}$ inversível, a equação (1) pode ser reescrita como

$$\ddot{\mathbf{X}} + \mathbf{M}^{-1}\mathbf{C}\dot{\mathbf{X}} + \mathbf{M}^{-1}\mathbf{K}\mathbf{X} = \mathbf{M}^{-1}f(t) \tag{2}$$

obtida pela pré-multiplicação da equação (1) por $\mathbf{M}^{-1}$. Denotando $\mathbf{A} = \dfrac{1}{2}\mathbf{M}^{-1}\mathbf{C}$ e $\mathbf{B} = \mathbf{M}^{-1}\mathbf{C}$ a equação (2) pode ser reescrita como

$$\ddot{\mathbf{X}} + 2\mathbf{A}\dot{\mathbf{X}} + \mathbf{B}\mathbf{X} = \mathbf{M}^{-1}f(t) \tag{3}$$

Tomando

$$\mathbf{X} = \mathbf{V(t)q} \tag{4}$$

onde $\mathbf{V(t)}$ é uma função matricial. Derivando (4) com respeito a t vem que

$$\dot{\mathbf{X}} = \dot{\mathbf{V(t)}}\mathbf{q} + \mathbf{V(t)}\dot{\mathbf{q}} \tag{7}$$

e

$$\ddot{\mathbf{X}} = \ddot{\mathbf{V(t)}}\mathbf{q} + 2\dot{\mathbf{V(t)}}\dot{\mathbf{q}} + \mathbf{V(t)}\ddot{\mathbf{q}} \tag{8}$$

Substituindo (7) e (8) em (3), obtem-se

$$\mathbf{V(t)}\ddot{\mathbf{q}} + 2\left[\dot{\mathbf{V(t)}} + \mathbf{AV(t)}\right]\dot{\mathbf{q}} + \left[\ddot{\mathbf{V(t)}} + 2\mathbf{A}\dot{\mathbf{V(t)}} + \mathbf{BV(t)}\right]\mathbf{q} = \mathbf{M}^{-1}f(t) \tag{9}$$

Fazendo, na equação (9), o coeficiente do $\dot{\mathbf{q}}$ igual a zero, obtém-se a equação

$$\dot{\mathbf{V(t)}} + \mathbf{AV(t)} = \mathbf{0} \tag{10}$$

que é uma equação diferencial matricial de 1^a ordem, linear, homogênea e com coeficientes constantes. Sua solução, em analogia ao caso escalar, é dada por

$$\mathbf{V(t)} = e^{-\mathbf{A}t} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-\mathbf{A}t)^k}{k!} \tag{11}$$

Observe que $e^{-\mathbf{A}t}$ é inversível pois

$$e^{\mathbf{A}t}e^{-\mathbf{A}t} = \mathbf{I} \tag{12}$$

e

$$\left(e^{-\mathbf{A}t}\right)^{-1} = e^{\mathbf{A}t} \tag{13}$$

Também

$$\frac{d}{dt}\left[e^{-\mathbf{A}t}\right] = -\mathbf{A}e^{-\mathbf{A}t} \tag{14}$$

e

$$\frac{d^2}{dt^2}\left[e^{-\mathbf{A}t}\right] = \mathbf{A}^2e^{-\mathbf{A}t} \tag{15}$$

Supondo convergência uniforme, a expansão em Série de Taylor que aparece em (11) pode ser derivada termo a termo obtendo-se (14). A prova que (14) é solução de (10) fica para o leitor. Na PARTE II, usando (4), serão apresentados sistema com amortecimento em um sistema sem amortecimento e condições necessárias e suficientes para realizar a referida transformação.

Nos últimos anos vimos grandes catástrofes causadas por terremotos em diferentes países, como no Haiti (2010) e no Nepal (04/2015). Além das tsunamis no Japão, em 2011, e no Chile, em 2010, causados por terremotos que ocorreram nesses países. Vamos entender um pouco mais deste fenômeno natural.

Os terremotos também chamados de abalos sísmicos, são tremores passageiros, causados por atividades vulcânicas, falhas geológicas, mas principalmente pelo encontro de placas tectônicas. As tsunamis são ondas gigantes com grande concentração de energia que podem ocorrer nos oceanos, são provacadas pela movimentação das placas tectônicas abaixo dos oceanos.

Mas o que são placas tectônicas? São porções da litosfera ou crosta terrestre limitadas por zonas de convergência. Essas poções movimentam-se interagindo entre si, o que ocasiona uma intensa atividade geológica, provocando os terremotos. Atualmente existem doze placas, mas que podem se dividir em placas menores.

O encontro das placas tectônicas ocorre nas chamadas zonas de convergência. O local desse encontro no interior da terra é chamado de hipocentro, enquanto o ponto de encontro das mesmas, na superfície, é chamado de epicentro. O epicentro está situado acima do hipocentro. A quantidade de energia liberada no foco do terremoto é denominada magnitude, e é medida através da escala Richter.

Os criadores da denominada Escala Richter foram Charles Francis Richter e Beno Gutenberg. Ela foi criada, em 1935, para medir a magnitude de um terremoto tendo como base as ondas sísmicas que alastram-se a partir do foco do terremoto provocado pelo mesmo.

A Escala Richter tem base logarítmica que varia de zero a nove graus. A magnitude (em graus) é o logaritmo da medida das amplitudes das ondas sísmicas produzidas pela liberação de energia do terremoto. A magnitude (M) é dada por:

$$M = logA - logA_0$$

onde A representa a amplitude máxima e A_0 representa a amplitude de referência. Como é usado logaritmo na escala, quando calcularmos um terremoto de escala quatro e outro de escala cinco, vamos perceber um aumento de dez vezes em sua amplitude. Já em relação a energia liberada por um terremoto de sete graus para um de oito, vamos ter uma diferença de trinta e duas vezes mais energia. A energia é dada por:

$$I = (2/3)log10(E/E_0)$$

onde I varia de zero a nove, E representa a energia liberada em kW/h e E_0 em $7x10^{-3}$ kW/h. A energia liberada no interior do planeta pelos tremores de magnitude sete na escala Richter, por exemplo, equivale à maior bomba termonuclear já testada pelo homem.

Atualmente, não há como prever com exatidão os locais e datas de possíveis terremotos, mas nos países mais ricos existentem diversos investimentos em programas de prevenção de desastres.

Referências:

A Matemática Envolvida no Fenômeno Natural: Terremoto. Disponível em <http://www.sbmac.org.br/eventos/cnmac/xxxii_cnmac/pdf/386.pdf>

TERREMOTOS. Disponível em <http://www.brasilescola.com/geografia/terremotos.htm>

O que são terremotos e como se mede sua intensidade?.Disponível em<http://revistaescola.abril.com.br/ciencias/fundamentos/como-se-mede-forca-terremotos-abalos-sismicos-489737.shtml>

Normalmente, as pessoas não entendem conceitos relacionados com a função exponencial, principalmente quando diz respeito ao "crescimento exponencial". Desde que Thomas Malthus (1766-1834) a usou para descrever o crescimento populacional, muita gente fala sobre isso na vida cotidiana, mas poucos à entendem.

Na maioria das vezes, as pessoas confundem o crescimento exponencial com o crescimento do valor real, e simplesmente ignoram o fato que existem outros tipos de crescimento que também são muito rápidos. A ideia desse artigo é experimentar e mostrar, com os estudantes e professores do ensino secundário, que a tecnologia (calculadoras e/ou computadores) podem contribuir para uma melhor compreensão do "crescimento exponencial" e comparar com outros tipos de crescimento.

Para compreender melhor as ideias, iremos discutir e ilustrar um exemplo interessante que não pode ser entendido sem o uso da tecnologia.

Exemplo: Usando uma calculadora gráfica ou um computador, vamos comparar os gráficos de 2^x e x^2.

Se traçarmos estes dois gráficos à mão ou com algum *software* automático que escolhe o intervalo, vamos ter algo parecido com a Figura 1.

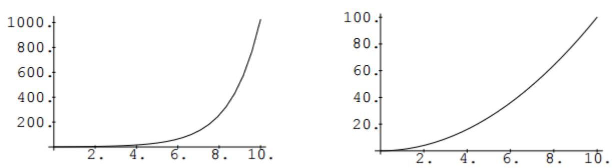

Figura: Os gráficos de 2^x e x^2.

Se traçarmos esses gráficos ao mesmo tempo e no mesmo plano, será possível uma comparação de seus comportamentos. Se o intervalo for muito pequeno, podemos nos surpreender ao obtermos a função exponencial.

Já se escolhermos um intervalo muito grande, a função tende a um crescimento muito grande. Após algumas experiências, vamos obter o que é mostrado na figura 2.

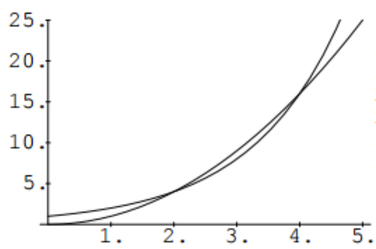

Figura: Os gráficos de 2^x e x^2, após algumas experiências de intervalos.

Mas, se tentarmos comparar os gráficos 2^x e x^7, as coisas ficam complicadas. Notamos que a função exponencial é claramente superior comparada à função de potência. Neste caso, é mais difícil obter uma restrição do dominío em que podemos notar a passagem da função exponencial sobre a função de potência.

É impossível visualizar os pontos de interseção dos gráficos, a menos que usemos *log*. Para isso, faz-se o uso de uma calculadora gráfica e/ou de um computador, para plotar os gráficos.

Um ponto muito importante a se questionar é como se dá o "crescimento" de cada função. Podemos concluir, a partir do gráfico, que em alguns pontos, a função de potência pode crescer mais rápido que a função exponencial. Porém, esta só cresce rapidamente para valores muito grandes de x. Podemos ainda, chegar à mesma conclusão se estudarmos a derivada de cada função.

Dessa forma, por uma população ser "grande" não significa que terá um "crescimento acelerado".

Referências:

SILVA, J.C. **Understanding Exponential Growth With Technolog**. Univ. de Coimbra - Portugal, 2008.

No ano de 1939, iniciava-se a maior guerra conhecida, os alemães nazistas liderados pelo tirano Hitler, queriam unificar o poder nas mãos da Alemanha. Usufruindo o poder, Hitler juntou os maiores físicos e químicos da época, incluindo pesquisadores judeus.

Albert Einstein, após explicar o efeito foto elétrico e fundar a teoria da relatividade especial e restrita, ganhou grande fama e foi convocado por Hitler devido a sua descoberta sobre a energia armazenada no núcleo da matéria. Em uma equação Einstein mostrou que uma pequena quantidade de matéria, armazenava uma grande quantidade de energia. Por ser pacifista, Einstein negou a convocação, Hitler por meio dos veículos informativos da época, pôs Einstein como um inimigo da Alemanha, obrigando-o a sair de Berlim e se abrigar nos Estados Unidos.

Hitler queria descobrir como, pela fissão nuclear, era possível construir uma bomba que em seu poder, seria a arma que lhe daria o poder absoluto. Mas na época era difícil propor uma forma em que essa fissão nuclear fosse autossuficiente e mesmo em meio aos maiores pesquisadores, era difícil causar tal reação para não se gastar uma quantidade de energia maior do que se era aplicada como reagente. Porém em meados de 1941 e 1942 bate à casa de Einstein seu velho amigo de pesquisas Leó Szilard. Em sua visita, disse a Einstein que era possível a fissão nuclear autossustentável. Ao observar as anotações que Szilard havia lhe direcionado nesta visita, entrou em profundo estado de espanto, pois o mesmo havia proposto uma maneira de fissionar um átomo. Como se sabe, quando um próton se aproxima de um átomo, rapidamente o núcleo composto da mesma carga o repele, o mesmo acontece com o elétron quando se aproxima da camada elétrica atômica. Porém, Szilard estudando as recentes propriedades da partícula nêutron, descobriu que ele não poderia ser repelido pela estrutura do átomo, pois não possuía carga. Sendo assim não haveria força repulsiva sobre ele.

O núcleo é bombardeado por nêutrons, e sua extremidade oposta com prótons entrará em contato com a outra extremidade, dividindo-o em dois, liberando uma grande quantidade de energia e mais nêutrons para bombardear outros átomos, causando uma reação em cadeia descrita pela equação $E = MC^2$. Ao mostrar a descoberta, Szilard explicou este fato, e disse que os alemães estavam bem perto desta descoberta.

Einstein por ter grande influência, escreveu uma carta ao presidente Roosevelt dizendo que era necessária uma medida contraposta a tais acontecimentos e fatos, e que sua equação $E = MC^2$ havia encontrado uma aplicação palpável.

Roosevelt recebeu a carta e logo encaminhou um ofício com um pedido a engenheiros e físicos que criassem esta bomba. Liderados pelo físico americano J. Robert Oppenheimer, foi criado o projeto Manhattan, sediado em várias cidades dos Estados Unidos. Mas no ano de 1945 a Alemanha se rendeu, ano em que o projeto ficou pronto, inviabilizando o uso da bomba. Porém, no Japão, resistências nazistas ainda estavam em pé e, em 9 de agosto de 1945 a bomba de codinome Fat Man explodiu sobre Nagasaki e outra de codinome Little boy, explodiu sobre Hiroshima, matando cerca de 200 mil pessoas em uma explosão de 1.110 kg que gerou uma energia de cerca de 1,2 milhões de toneladas de dinamite.

Porém, as discussões a cerca deste ato ainda são pautas de muitos debates, nunca sendo revelada a real intenção de tais atrocidades.

Referências:

Gênios da Ciência Einstein $E = mc^2$. Disponível em: <https://www.youtube.com/watch?v=eZMUm53d6LY>. Acesso em 25 abr.2015.

Se formos pensar em importantes áreas da matemática, com certeza não podemos deixar de fora a Análise Funcional, originada a partir da Análise Clássica e cujos métodos e resultados são importantes dentro de diversos campos da matemática. Uma estrutura fundamental dentro da Análise Funcional é a de Espaço Métrico, pois tem um papel similar ao de $\mathbb{R}$ no cálculo. No cálculo, estudamos funções definidas em $\mathbb{R}$. Basta pensarmos um pouco e concluiremos que diversos processos, tais como o de limite de funções, estão baseados numa função distância, ou seja, uma função d, tal que para cada par de pontos $x, y \in \mathbb{R}$ associamos o número real $d(x, y) = |x - y|$. Contudo, em Análise Funcional estudam-se "espaços mais gerais", os quais necessitam de métricas adequadas, o que motiva a seguinte definição:

Definição: Um **Espaço Métrico** é um par (X, d), onde X é um conjunto não vazio e d é uma **métrica** em X(ou **função distância**), ou seja, uma função definida de $X \times X$ em $\mathbb{R}$ tal que para todo $x, y, z \in X$ temos:

i) d é um valor real, finito e não negativo.

ii) $d(x, y) = 0 \Leftrightarrow x = y$.

iii) $d(x, y) = d(y, x)$.

iv) $d(x, y) \leq d(x, z) + d(z, y)$.

Por indução em (iv), obtemos a forma generalizada da desigualdade triangular:

$$d(x_1, x_n) \leq d(x_1, x_2) + \cdots + d(x_{n-1}, x_n).$$

Daqui pra frente, ao nos referirmos ao espaço métrico (X, d), utilizaremos apenas X. Como trata-se de um "espaço" é natural, assim como conhecemos lá na Álgebra Linear ao trabalhar com espaços vetoriais, nos perguntarmos sobre a existência de subespaços e qual a estrutura que apresentam.

Chamamos de **subespaço** $(Y, \overline{d})$ de (X, d) o subconjunto $Y \subset X$ e a restrição de d a $Y \times Y$. Assim, a métrica em Y é a restrição

$$\overline{d}|_{Y \times Y}.$$

onde $\overline{d}$ é chamada a métrica **induzida** em Y por d. Vejamos alguns exemplos de métricas:

1) No espaço euclidiano $\mathbb{R}^n$, considerando $P = (x_1, \cdots, x_n)$ e $Q = (y_1, \cdots, y_n)$ temos: $d(x, y) = \sqrt{(x_1 - y_1)^2 + \cdots + (x_n - y_n)^2}$.

2) Consideremos o espaço $\mathcal{C}[a, b]$ de todas as funções f contínuas num intervalo fechado $J = [a, b]$. Temos que
$$d(x, y) = max_{x \in J}|f(x) - g(x)|$$

3) Espaço ℓ^p: por definição, cada elemento de ℓ^p é uma sequência (x_n) de números, tal que $|x_1|^p + \cdots + +|x_n|^p + \cdots$ converge. Definimos a métrica
$$d(x, y) = \left(\sum_{j=1}^{\infty} |x_j - y_j|^p \right)^{\frac{1}{p}}$$

Dentro dos espaços métricos é possível definir estruturas como: conjuntos abertos e fechados, vizinhança, aplicações contínuas, sequências, bem como a convergência das mesmas, além de outras estruturas já conhecidas do estudo na Análise Real (lembre que $\mathbb{R}$ é um espaço métrico). Dito isto, é interessante conhecermos a definição de espaço métrico completo.

Definição: Um espaço métrico X é dito **completo** se toda sequência de Cauchy em X converge para um elemento de X. Esta é uma noção extremamente importante, bem como toda a demais teoria dos espaços métricos, em diversas áreas da matemática (além da própria Análise Funcional), tais como os sistemas dinâmicos, equações diferenciais ordinárias, entre outras.

Referências:

KREYSZIG, E. **Introductory Functional Analysis with Applications**. USA: Braun-Brumfield Inc., 1978.

A geometria fractal, que explica principalmente as formas que são encontradas na natureza, é relativamente nova se comparada às demais geometrias, porém, de grande importância para o ramo da matemática. Apesar de ser muito importante, há ainda uma dificuldade para inseri-la no ensino da matemática nas escolas. Para tentar entender um pouco mais sobre esse assunto Karakus, PhD em Educação Matemática da Universidade Karadeniz Teknik, de Trabzon, na Turquia, fez um estudo sobre o modo como alunos compreendem fractais.

O estudo de fractais no ensino educacional turco é iniciado no oitavo grau, onde os alunos aprendem o que são fractais e iniciam a desenhar os mesmos. O próximo contato com fractais se dá no nono e décimo grau, onde aprendem padrões para encontrá-los e operações matemáticas que os envolvem.

Para analisar o nível de aprendizagem dos alunos, foi aplicado um teste com nove questões, as quais englobam quatro categorias principais: Definição de Fractais, Determinação de Fractais, Procura por Padrões de Fractais e Operações Matemáticas com Padrões de Fractais. A primeira parte do teste consistia em questões de múltipla escolha e a segunda parte necessitava que os alunos justificassem suas respostas.

A amostra de alunos foi selecionada aleatoriamente a partir de uma escola primária e duas escolas secundárias da cidade de Trabzon, na Turquia, composta por 187 alunos do oitavo, nono e décimo grau.

Para analisar os resultados dos alunos, utilizou-se a seguinte categorização: escolha correta com justificativa correta (6 pontos), escolha correta com justificativa parcialmente correta (5 pontos), escolha errada com justificativa correta (4 pontos), escolha errada com justificativa parcialmente correta (3 pontos), escolha correta com justificativa errada (2 pontos), escolha correta sem justificativa (1 ponto), escolha errada ou deixada em branco (0 pontos).

Na Definição de Fractais, a pontuação média máxima foi de 12 pontos. Uma das razões possíveis é que apenas o livro didático do oitavo grau contém esta definição, e assim, estes estudantes ainda não possuem uma base para compreender como é formado um fractal.

Em Determinação de Fractais, a pontuação média máxima foi de 18 pontos. Um dos motivos é que os alunos reconhecem os fractais de maneira intuitiva, algo natural, porém não possuem um domínio completo para identificarem todas as formas.

Na Procura de Padrões de Fractais, a pontuação média máxima foi de 12 pontos. Os alunos possuem dificuldades na determinação do padrão da forma dos fractais e em detectar padrões recorrentes.

Nas Operações Matemáticas com Padrões de Fractais, a pontuação média máxima foi de 12 pontos. A principal razão é o baixo entendimento da definição e dos padrões de fractais, tornando as operações matemáticas mais difíceis de serem compreendidas.

Com base nesses resultados, percebe-se que o entendimento dos alunos sobre fractais é muito baixo. Inicialmente, seria necessário que os livros possuíssem um conteúdo mais completo e adequado ao grau no qual os estudantes se encontram. Outra alteração seria proporcionar uma qualificação sobre fractais para os professores, dando-os uma compreensão maior sobre o assunto. Com estas ações, o entendimento dos alunos sobre fractais melhoraria consideravelmente.

Referências:

KARAKUS, F. A Cross-age study of students' understanding of fractals. **Bolema: Boletim de Educação Matemática**, v. 27, p. 829-846, 2013.