Universidade Federal de Santa Maria
Centro de Ciências Naturais e Exatas
Departamento de Física
Laboratório de Teoria da Matéria Condensada

Sistema de equações lineares e não lineares

Tiago de Souza Farias

09 de novembro de 2012

Sumário

Equações lineares

- Equações lineares são equações que envolvem relações algébricas entre variáveis de grau um;
- Graficamente, as equações lineares podem ser retas, planos ou hiperplanos;
- Sistema linear é um conjunto de equações lineares ou equações não lineares reduzidas;
- Notação:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \vdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \ldots + a_{mn}x_n = b_m \end{cases}$$

Equações lineares

- Para alguns casos, é útil apresentar um sistema linear em sua forma matricial:

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{bmatrix}$$

Solução de um sistema linear

- A possibilidade de um sistema linear possuir solução está no posto de seu sistema;
- Define-se posto o número de linhas não-nulas linearmente independentes de um sistema em forma matricial;
- O posto pode ser calculado por escalonamento ou determinante;
- Chama-se p_r o posto de uma matriz reduzida e p_a o posto de uma matriz ampliada;

Solução de um sistema linear

- Para o sistema:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \vdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \ldots + a_{mn}x_n = b_m \end{cases}$$

Sistema linear em forma matricial ampliada e forma matricial reduzida:

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2n} & b_2 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \\ a_{m1} & a_{m2} & \ldots & a_{mn} & b_m \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \ldots & a_{mn} \end{bmatrix}$$

Solução de um sistema linear

- Um sistema linear poderá ser classificado como:

  [•] Sistema possível e determinado: apresentará uma única solução para cada variável quando o número de incógnitas for igual ao posto da matriz ampliada e reduzida;

  [•] Sistema possível e indeterminado: apresentará infinitas soluções para para cada incógnita quando o posto da matriz reduzida for igual da matriz ampliada e diferentes do número de variáveis;

  [•] Sistema impossível: não possui solução quando o posto da matriz ampliada for diferente da matriz reduzida;

Eliminação de Gauss

- Possui solução exata;
- É o método com menor número de operações, diminuindo custo computacional;
- Consiste em multiplicar cada equação por um número real (pivô) para obter um sistema em forma de escada:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n = b_1 \\ 0 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \vdots \\ 0 + \quad 0 + \ldots + a_{nn}x_n = b_n \end{cases}$$

Eliminação de Gauss - Exemplo

Resolver o sistema:

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 = 3 \\ -2x_1 + x_2 + 3x_3 = 6 \\ 3x_1 - 2x_2 - x_3 = 9 \end{cases}$$

Eliminação de Gauss - Exemplo

- Para eliminar o primeiro coeficiente da segunda equação devemos encontrar um pivô que possa eliminá-lo, neste caso, o pivô será p=2, que multiplicado pela primeira equação e somado a segunda, obtém-se:

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 = 3 \\ 0x_1 + 3x_2 + 5x_3 = 12 \\ 3x_1 - 2x_2 - x_3 = 9 \end{cases}$$

- As operações de pivoteamento continuam sendo realizadas até chegar em um sistema com formato escada:

$$\begin{cases} x_1 + \quad x_2 + x_3 = 3 \\ 0x_1 + 3x_2 + 5x_3 = 12 \\ 0x_1 + 0x_2 + \frac{13}{3}x_3 = 20 \end{cases}$$

- As incógnitas são isoladas e aplicadas, obtendo: $x = \begin{bmatrix} \frac{1081}{39} & \frac{-88}{3} & \frac{60}{13} \end{bmatrix}$

Método de Gauss-Jordan

- Possui solução exata;
- É o método com maior facilidade em resolução;
- Consiste em multiplicar cada equação por um número real (pivô) para obter um sistema em forma de matriz identidade:

$$\left\{\begin{array}{ccccccc} a_{11}x_1 & + & 0 & +\ldots+ & 0 & = & b_1 \\ 0 & + & a_{22}x_2 & +\ldots+ & 0 & = & b_2 \\ & & & \vdots & & & \\ 0 & + & 0 & +\ldots+ & a_{nn}x_n & = & b_n \end{array}\right.$$

Solução geral:
$x_i = b_i / a_{ii}$

Método de Gauss-Jordan - Exemplo

Resolver o sistema:

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 = 1 \\ 2x_1 + x_2 + x_3 = 2 \\ x_1 - 3x_2 - 2x_3 = 4 \end{cases}$$

- Elimina-se os coeficientes do sistema por pivoteamento até obter a forma diagonalizada:

$$\begin{cases} x_1 + 0x_2 + 0x_3 = 1 \\ 0x_1 - x_2 + 0x_3 = -3 \\ 0x_1 - 0x_2 - x_3 = 3 \end{cases}$$

- As incógnitas são isoladas e aplicadas, obtendo: $\mathrm{x} = \begin{bmatrix} 1 & 3 & -3 \end{bmatrix}$

Iteração

- Métodos iterativos são processos que buscam uma resposta aproximada;
- Consiste em aproximar um resultado a partir de uma série de soluções para um problema;
- Em geral, através de um método iterativo há uma economia em custo computacional;
- A convergência para o resultado é obtido pelo número de iterações realizadas;
- Se a matriz reduzida for estritamente diagonal dominante por linhas, então a solução será convergente;

Método de Jacobi

- É um método iterativo;
- Consiste em isolar em cada equação uma incógnita, aplicando uma aproximação inicial arbitrária, obtendo então uma nova aproximação;
- A cada nova aproximação, os valores convergem para o resultado;

Método de Jacobi - Exemplo

- Resolver o sistema:

$$\begin{cases} 4x_1 + 2x_2 + x_3 = 11 \\ 2x_1 + 4x_2 - 3x_3 = 5 \\ x_1 + x_2 - x_3 = 3 \end{cases}$$

Método de Jacobi - Exemplo

- Primeiro isolamos uma inncógnita em cada equação:

$$\begin{cases} x_1 = \frac{11-2x_2-x_3}{4} \\ x_2 = \frac{5-2x_1+3x_3}{4} \\ x_3 = x_1 + x_2 - 3 \end{cases}$$

- Atribue-se uma aproximação inicial ao sistema obtendo uma nova aproximação (primeira iteração):
  $x^0 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$

$$\begin{cases} x_1 = \frac{11-2*0-0}{4} \\ x_2 = \frac{5-2*0+0}{4} \\ x_3 = 0 + 0 - 3 \end{cases}$$

$x^1 = \begin{bmatrix} 2.75 & 1.25 & -3 \end{bmatrix}$

Método de Jacobi - Exemplo

- Aplica-se a nova aproximação no sistema, obtendo uma segunda aproximação (segunda iteração) e assim sucessivamente, as iterações se tornam cada vez mais precisas até convergir para o resultado:

  $x^2 = \begin{bmatrix} 2.87 & -2.37 & -2.50 \end{bmatrix}$
  $x^3 = \begin{bmatrix} 4.56 & -2.06 & -0.50 \end{bmatrix}$
  $x^4 = \begin{bmatrix} 3.90 & -1.40 & -0.50 \end{bmatrix}$
  $x^5 = \begin{bmatrix} 3.57 & -1.07 & -0.50 \end{bmatrix}$
  $x^6 = \begin{bmatrix} 3.41 & -0.91 & -0.50 \end{bmatrix}$
  $x^7 = \begin{bmatrix} 3.33 & -0.83 & -0.50 \end{bmatrix}$
  $x^n = \begin{bmatrix} 2.25 & -0.75 & -0.50 \end{bmatrix}$

Processo de Gauss-Seidel

- É um método iterativo;
- Converge mais rápido que o método de Jacobi;
- Consiste em isolar em cada equação uma incógnita, aplicando uma aproximação inicial arbitrária na primeira variável;
- Aplica-se a solução da primeira incógnita nas outras equações, e então repete-se o processo;
- A cada nova aproximação, os valores convergem para o resultado;

Processo de Gauss-Seidel - Exemplo

- Resolver o sistema:

$$\begin{cases} 4x_1 + 2x_2 + x_3 = 11 \\ 2x_1 + 4x_2 - 3x_3 = 5 \\ x_1 + x_2 - x_3 = 3 \end{cases}$$

Processo de Gauss-Seidel - Exemplo

- Primeiro isola-se uma variável em cada equação:

$$\begin{cases} x_1 = \frac{11-2x_2-x_3}{4} \\ x_2 = \frac{5-2x_1+3x_3}{4} \\ x_3 = x_1 + x_2 - 3 \end{cases}$$

- Aplica-se uma aproximação inicial no sistema para x_2 e $x_3 = 0$, obtendo uma nova aproximação: $x^1 = \begin{bmatrix} 2.75 & 0 & 0 \end{bmatrix}$
- Aplica-se a nova aproximação no sistema, obtendo a segunda iteração:
  $x^2 = \begin{bmatrix} 2.75 & -2.37 & -2.50 \end{bmatrix}$
- O número de iterações para a convergência é menor que o método de Jacobi:
  $x^3 = \begin{bmatrix} 2.90 & -0.47 & -0.57 \end{bmatrix}$
  $x^4 = \begin{bmatrix} 3.12 & -0.73 & -0.61 \end{bmatrix}$
  $x^5 = \begin{bmatrix} 3.26 & -0.74 & -0.48 \end{bmatrix}$
  $x^6 = \begin{bmatrix} 3.25 & -0.75 & -0.50 \end{bmatrix}$

Equações não lineares

- As equações não lineares são equações que não podem ser representadas por retas, planos ou hiperplanos;
- Resolver um sistema não linear é encontrar a seguinte solução:

$$\begin{cases} f_1(x_1, x_2, \dots, x_n) = 0 \\ f_2(x_1, x_2, \dots, x_n) = 0 \\ \vdots \\ f_n(x_1, x_2, \dots, x_n) = 0 \end{cases}$$

Método de Newton

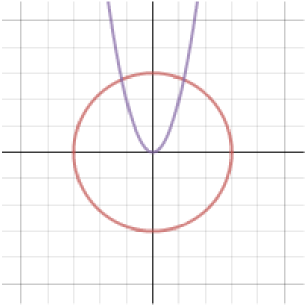
- É um método iterativo;
- Consite em linearizar um sistema não linear através da obtenção de tangentes em um ponto inicial;
- A matriz dos pontos iterativos são obtidos através da derivação do sistema, chamado matriz Jacobiana:

$$\begin{bmatrix} \frac{\partial f_1(x^{(0)})}{\partial x_1} & \frac{\partial f_1(x^{(0)})}{\partial x_2} & \cdots & \frac{\partial f_1(x^{(0)})}{\partial x_n} \\ \frac{\partial f_2(x^{(0)})}{\partial x_1} & \frac{\partial f_2(x^{(0)})}{\partial x_2} & \cdots & \frac{\partial f_2(x^{(0)})}{\partial x_n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \frac{\partial f_n(x^{(0)})}{\partial x_1} & \frac{\partial f_n(x^{(0)})}{\partial x_2} & \cdots & \frac{\partial f_n(x^{(0)})}{\partial x_n} \end{bmatrix} = J(x^{(0)})$$

Método de Newton - Exemplo

Resolver o seguinte sistema não linear:

$$\begin{cases} x_1^2 + x_2^2 - 9 = 0 \\ 2x_1^2 - x_2 = 0 \end{cases}$$



Método de Newton - Exemplo

- Obter a matriz Jacobiana:
  $J(x^{(k)}) = \begin{bmatrix} 2x_1^{(k)} & 2x_2^{(k)} \\ 4x_1^{(k)} & -1 \end{bmatrix}$
- Estimar um ponto inicial:
  $x^{(0)} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \end{bmatrix}$
- Ao aplicar o ponto inicial no sistema obtemos:

$$\begin{cases} 1^2 + 1^2 - 9 = -7 \\ 2 * 1^2 - 1 = 1 \end{cases}$$

$F(x^{(0)}) = \begin{bmatrix} -7 & 1 \end{bmatrix}$

Método de Newton - Exemplo

- Ao aplicar o ponto inicial na matriz Jacobiana obtemos:
  $J(x^{(0)}) = \begin{bmatrix} 2 & 2 \\ 4 & -1 \end{bmatrix}$
- Para obter a primeira iteração, primeiro multiplicamos a matriz Jacobiana pela variação para primeiro ponto iterativo e igualamos ao sistema aplicado no ponto inicial:
  $\begin{bmatrix} 2 & 2 \\ 4 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Delta x_1^{(0)} \\ \Delta x_2^{(0)} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -7 \\ 1 \end{bmatrix}$
- O produto matricial acima é um sistema linear, resolvendo obtemos:
  $\Delta x^{(0)} = \begin{bmatrix} -0.5 & 1 \end{bmatrix}$
- O ponto iterativo é obtido pela soma do pontos anteriores:
  $x^{(1)} = x^{(0)} + \Delta x^{(0)} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -0.5 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.5 \\ 2 \end{bmatrix}$

Método de Newton - Exemplo

- Ao aplicar o primeiro ponto iterativo aplicado na matriz Jacobiana obtemos:
  $J(x^{(1)}) = \begin{bmatrix} 1 & 4 \\ 2 & -1 \end{bmatrix}$
- Ao aplicar o primeiro ponto iterativo no sistema obtemos:

$$\begin{cases} 0.5^2 + 2^2 - 9 = -4.75 \\ 2 * 0.5^2 - 2 = -1.5 \end{cases}$$

  $F(x^{(1)}) = \begin{bmatrix} -4.75 & -1.5 \end{bmatrix}$
- Novamente obtemos um sistema linear em forma de produto matricial:
  $\begin{bmatrix} 1 & 4 \\ 2 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Delta x_1^{(1)} \\ \Delta x_2^{(1)} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -4.75 \\ -1.5 \end{bmatrix}$
- Resolvendo o sistema acima obtemos:
  $\Delta x^{(1)} = \begin{bmatrix} -1.305 & -1.513 \end{bmatrix}$

Método de Newton - Exemplo

- A segunda iteração pode ser obtida:
  $x^{(2)} = x^{(1)} + \Delta x^{(1)} = \begin{bmatrix} 0.5 \\ 2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -1.305 \\ -1.513 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -0.805 \\ 0.487 \end{bmatrix}$
- As iterações continuam seguindo a mesma ordem realizada e só termina quando há uma convergência de valores, neste caso:
  $x^{(n)} = \begin{bmatrix} -1.175 & 1.175 \end{bmatrix}$

Bibliografia

STEWART, James. Antonio Carlos Moretti. Cálculo, volume 1. São Paulo: Cengage Learning, 2012.

BOLDRINI, José Luiz. Álgebra linear. São Paulo: Harba, 1980.

AGUIRRE, Luiz Antonio. Introdução À Identificação de Sistemas . Minas Gerais: UFMG, 2007.