



## UMA ABORDAGEM PARA A DISCIPLINA DE CÁLCULO A

Pedro André Pires Machado<sup>1</sup>

Colégio Militar de Santa Maria

andre.matematica@yahoo.com.br

### RESUMO

Este trabalho busca, através do estudo da História da Matemática e das teorias acerca do currículo em espiral, propor uma alternativa para o ordem a ser assumida no andamento da disciplina de Cálculo A (Cálculo diferencial e Integral de uma variável). Deste modo, buscamos analisar a evolução do estudo dos conceitos do Cálculo procurando justificar o tratamento diferenciado que daremos à teoria de Limites de funções de uma variável. Ao procurar compreender os conceitos que envolvem os Limites vamos valorizar o estudo das Derivadas e Integrais em uma ordem que vai das funções mais simples até as mais complexas, visando gerar nos alunos uma familiarização com os conceitos do Cálculo de uma forma gradativa. De uma maneira geral, estaremos propondo que os Limites devem ser “diluídos” durante o avanço do estudo das Derivadas e Integrais partindo de noções mais intuitivas e chegando, ao fim da disciplina, à concepção aceita desde o século XIX pela comunidade matemática. Assim, estaremos salientando que o entendimento das Derivadas e Integrais deve ser o principal objetivo de um curso de Cálculo A e que, por este motivo, é preciso priorizar o tratamento destes conceitos desde o início do curso sem, com isso, tirar a importância do entendimento dos resultados mais abstratos desta teoria da Matemática.

**Palavras-chave:** Cálculo; Espiral ; Estrutura.

---

<sup>1</sup> Mestre em Matemática Pura pela Universidade Federal de Santa Maria, Bacharel e Licenciado em Matemática pela Universidade Federal de Santa Maria. Docente do CMSM.



## 1.INTRODUÇÃO

A palavra Cálculo deriva do latim *Calculus* que significa “pedrinha” e pode estar associada ao processo de contagem por correspondência realizada pelos pastores da Antiguidade no controle dos rebanhos. Atualmente tal palavra tem dois significados em matemática: um relacionado ao ato de calcular, ou seja, de efetuar operações aritméticas entre números; o outro relacionado ao ramo da matemática superior que se caracteriza, principalmente, pelo estudo de limites, derivadas e integrais de funções de uma ou mais variáveis. O Cálculo, como uma disciplina do Ensino Superior, representa uma das principais vias de aplicação da matemática na atualidade, sendo de grande utilidade em áreas como: Engenharias, Economia, Medicina, Ciência da Computação, Química, Física, Biologia, entre outras.

A partir do século XVII, com o advento da Geometria Analítica surgiram muitos problemas aplicados envolvendo curvas; entre eles estavam o problema de encontrar a reta tangente a uma curva dada e o problema da quadratura.

O primeiro problema citado acima está intimamente relacionado a um dos principais conceitos do Cálculo, o conceito de Derivada, e devido a sua importância, recebeu estimada atenção de Descartes e de outros matemáticos da época, entre eles : Pierre de Fermat (1601-1665), Johan Hudde (1628-1704) , Christiaan Huygens (1629-1695) , René François de Sluse (1622-1685) , Isaac Newton (1642-1727) e Gottfried Wilhelm Leibniz (1646-1716). Newton e Leibniz são reconhecidos atualmente como os inventores do Cálculo. Apesar de inúmeras desavenças a cerca do mérito de tal criação, a base dos conceitos utilizados por ambos era análoga, como cita Florian Cajori:



Deve ser observado que no *Método dos Fluxos* (bem como no seu *De Analysis*), a abordagem usada por Newton é estritamente infinitesimal, e em substância idêntica a de Leibniz, assim, a concepção original do cálculo na Inglaterra como no continente está baseada em infinitésimos... A diferença primordial entre o sistema de Newton e o de Leibniz está em que o primeiro, mantendo a concepção de velocidade ou fluxo, usou o incremento infinitamente pequeno como meio de cálculo do próprio incremento, enquanto com Leibniz a relação de incrementos infinitamente pequenos é por si mesma objeto de cálculo. No resto, a diferença dos dois sistemas está no modo de gerar as quantidades. (CAJORI, 2007, p. 255)

O problema da quadratura do círculo, por sua vez, é um dos três problemas clássicos da geometria grega e consiste na obtenção de uma seqüência finita de construções geométricas usando régua não graduada e compasso que possibilite, a partir de um círculo, obter um quadrado de mesma área. No século XVII aos olhos da Geometria Analítica o problema da quadratura assumiu um caráter mais geral: a busca pela obtenção de medidas de áreas estabelecidas entre curvas. Atualmente, este problema está diretamente relacionado ao conceito de Integral que, por sua vez, relaciona-se com o conceito de Derivadas através do *Teorema Fundamental do Cálculo*.

No início do século XVIII, quando Cálculo já era aplicado nas mais diversas situações, surgem os primeiros esforços de matemáticos visando a rigorização desta disciplina. Um exemplo disso está no tratamento infinitesimal dado no Cálculo, como cita Gilli Martins:

De fato, embora durante os séculos XVII e XVIII e parte do século XIX o uso das concepções infinitesimais em problemas relacionados ao Cálculo tenha sido prática comum, incontestavelmente profícua, sob o ponto de vista técnico, matemáticos notáveis desse período como os irmãos Bernoulli, Euler, Lagrange, Borsari e Cauchy, só para destacar alguns entre os notáveis, mesmo obtendo importantes resultados com as concepções infinitesimais, não lograram êxito em suas tentativas na fundamentação lógica dessas concepções. (GILLI MARTINS, 2005, p. 46)



Nesta época, Augustin Louis Cauchy (1789-1857) foi o primeiro a estabelecer a noção de Limite como sendo a base para o estudo das Derivadas e Integrais. Seguiu-se ao longo do século XIX um processo de formalização que culminou na estrutura atual do Cálculo, considerando os Limites em termos estritamente aritméticos, através de módulos e desigualdades.

Nos dias atuais, em um curso de nível superior, os conceitos do Cálculo são divididos de duas maneiras em ordem cronológica:

i) *Cálculo para funções de uma variável*. Baseia-se no estudo de limites, derivadas e integrais de funções de uma variável de diferentes tipos como, por exemplo, as funções polinomiais, as logarítmicas, as exponenciais, as trigonométricas e as racionais.

ii) *Cálculo para funções de duas ou mais variáveis*. Engloba as funções de duas ou mais variáveis reais, além do estudo das funções vetoriais de uma ou mais variáveis, definindo os conceitos de limites, derivadas e integrais nestes casos.

Os itens i) e ii) acima são divididos nos currículos dos cursos de graduação em duas, três e até quatro disciplinas e, em alguns cursos (como economia e administração), julga-se necessário apenas o entendimento de i) para a boa aplicação dos conceitos posteriores da área em questão. Neste trabalho estaremos interessados na análise de i) como uma disciplina do ensino superior com uma carga horária semestral de 90 horas e a qual nos referiremos por "*Cálculo A*". Considerando as vivências que tivemos tanto como aluno quanto como professor de um curso de Cálculo A, pudemos perceber que a teoria de Limites de Funções, representa, para muitos alunos, um dos conteúdos mais complexos e abstratos do curso. Além disso, as altas taxas de reprovação que a disciplina apresenta, e as dificuldades enfrentadas pelos alunos no entendimento de seus conceitos fundamentais,



justificam a busca de uma estrutura curricular diferente daquela que está estabelecida nos livros de Cálculo A. Deste modo, vamos analisar as tendências de um curso de Cálculo A e buscar uma alternativa para a estruturação de seus conceitos para que o mesmo tenha um melhor aproveitamento tanto para os alunos, quanto para o professor. De uma maneira geral, vamos propor que os Limites devem ser “diluídos” durante o avanço do estudo das Derivadas e Integrais partindo de noções mais intuitivas e chegando, ao fim da disciplina, à concepção aceita desde o século XIX pela comunidade matemática. Assim, estaremos salientando que o entendimento das Derivadas e Integrais deve ser o principal objetivo de um curso de Cálculo A e que, por este motivo, é preciso priorizar o tratamento destes conceitos desde o início do curso sem, com isso, tirar a importância do entendimento dos resultados mais abstratos desta teoria da Matemática.

## **2. METODOLOGIA**

Este trabalho foi elaborado através da análise curricular da disciplina de Cálculo A dos cursos de Agronomia, Zootecnia, Tecnologia em alimentos, Engenharia Mecânica, Estatística, Engenharia Civil, Engenharia Elétrica, Engenharia Química, Matemática Economia e Física da Universidade Federal de Santa Maria (UFSM), dos quais pudemos observar a profunda relação entre as estruturas curriculares e as principais bibliografias indicadas nos currículos. Deste modo, analisamos alguns livros de Cálculo A, entre eles: ANTON et al (2007), THOMAS et. al. (2009), FLEMMING (2006), LEITHOLD (1994) e SWOKOWSKI (1991), procurando justificar, com base em estudos da História da Matemática e na teoria da aprendizagem em espiral de Jerome S. Bruner, uma nova estrutura didática para esta disciplina.

### **3.1. Tendências estruturais de um curso de Cálculo A**



Considerando os currículos e livros mencionados acima, podemos dividir a disciplina de Cálculo A em quatro conceitos principais:

*a) Funções.* No início da disciplina são “recapitulados” os conceitos relativos à reta real e às funções reais de uma variável.

*b) Limites.* Após o estudo das funções inicia-se o tratamento do conceito de limites para diferentes tipos de funções. Técnicas para o estudo dos limites de funções em um ponto ou quando a variável  $x$  tende a mais ou menos infinito são introduzidas, além do estudo da continuidade das funções.

*c) Derivadas.* Após o estudo de limites torna-se possível definir o conceito de derivada de uma função real. Estuda-se as derivadas de todas as funções do item a), as técnicas de derivação, os resultados referentes aos gráficos das funções reais e as aplicações do conceito de derivada.

*d) Integrais.* O último dos conceitos trabalhados no Cálculo A é bem definido com base na teoria de limites, assim como as derivadas, e seus aspectos são analogamente trabalhados para diferentes tipos de funções visando o estudo dos resultados, técnicas e aplicações deste conceito.

Em geral, um curso de Cálculo A segue uma ordem bem definida que vai de a) até d). Segundo Souza et al.(1993:10 apud Garnica, 1995:14) o discurso da Matemática é:

.../regido por um princípio de rigor, interno e muito específico, onde a Matemática é dada como pronta; mata as questões com a dicotomia certo/errado, em vez de aproveitar seu estímulo como questões a serem trabalhadas pelo aluno; vê a matemática desenvolvendo-se linearmente na história, do passado insuficiente à plenitude de seu estado atual, ao qual terá



sido conduzida pelo mérito desbravador dos grande sábios, ditos descobridores das grandes ideias...

Historicamente, os conceitos do Cálculo não se desenvolveram linearmente; os conceitos de Derivadas e Integrais foram os primeiros a serem trabalhados e proporcionaram, na medida em que eram estudados e aplicados, o avanço no entendimento de noções de funções e de infinitésimos (esses últimos viriam a ser substituídos pelo atual conceito de limite). Este é o principal elemento a ser considerado neste artigo, que os conceitos de Derivadas e Integrais não deveriam tardar a serem definidos e trabalhados em um curso de Cálculo A. Assumimos, então, que não é necessário o estudo de todos os tópicos de Limites para se definir Derivadas e Integrais, e que o entendimento desta teoria pode ocorrer em uma ordem mais gradativa e até mesmo histórica.

### **3.2. Uma proposta para a estrutura do Cálculo A**

Quando abrimos mão da linearidade imposta pela comunidade matemática desde o século XIX estamos assumindo a premissa de que o Cálculo A não deve ser encarado como uma espécie de “introdução à Análise na Reta”, mas sim, que tenha como objetivo principal o entendimento dos processos de derivação e integração em todos os momentos do curso buscando, entre outros fatores, compreender como estes conceitos se aplicam nas diversas áreas do conhecimento. Além disso, considerando que o conceito de Limite foi desenvolvido ao longo de três séculos, estamos propondo que o mesmo processo se desencadeie durante a disciplina de Cálculo A; para isso precisamos elaborar uma ordem que desenvolva tal conceito de uma forma gradativa, que vai de uma definição mais intuitiva, na qual utilizamos as funções contínuas, passa pelas funções descontínuas e pelo estudo dos limites laterais até a definição feita por Weierstrass utilizando módulos e desigualdades. Deste modo, nossa proposta divide o Cálculo A em partes diferentes



daquelas que nomeamos por a), b), c) e d). Abaixo consta uma breve descrição de tal proposta que pode ser melhor detalhada em trabalhos posteriores:

**m) *Introdução ao Cálculo.*** Neste primeiro momento propomos o trabalho de conceitos fundamentais ao estudo do Cálculo A, iniciamos com o estudo da Reta numérica, do plano Cartesiano e das chamadas *variações* ou *incrementos* no plano (notacionadas pela letra grega  $\Delta$ ). Encerramos estudando o conceito de função, no qual explicitamos apenas as definições mais básicas envolvendo domínio, imagem, gráficos, operações e composição de funções.

**n) *Polinômios.*** Consideramos este o principal Capítulo do curso, onde fundamentaremos muitos resultados importantes como: regras de derivação e integração, Teorema Fundamental do Cálculo e os principais resultados envolvendo funções contínuas. Deste modo, nosso objetivo é desenvolver uma grande parte das teorias de Derivadas e Integrais trabalhando com as funções mais simples para, posteriormente, estender estas concepções para outras funções. Além disso, é importante salientar que estaremos definindo uma concepção “intuitiva” do conceito de limite neste item.

**o) *Funções Trigonométricas, Logarítmicas e Exponenciais.*** Segue-se o estudo das principais funções contínuas juntamente com as derivadas e integrais das mesmas. Munidos do entendimento básico sobre derivação e integração de polinômios os alunos podem até ser responsáveis pela construção de alguns resultados deste item.

**p) *Funções Descontínuas.*** Começamos este item pelo estudo das funções racionais e dos limites laterais, não definidos até aqui. Estuda-se a descontinuidade e o efeito dela na derivação e na integração propondo agora uma maior atenção na análise das funções. Também são estudadas as funções definidas por partes elaboram-se vários exemplos para um bom entendimento da descontinuidade.



q) *Aplicação do Cálculo*. Aqui é possível desenvolver um trabalho envolvendo Modelagem Matemática procurando aplicar o Cálculo A nos diversos problemas do curso para o qual a disciplina está sendo ministrada.

r) *Introdução à Análise na Reta*. O encerramento desta disciplina se dá com princípios de Análise na Reta, onde procuramos justificar abstratamente os conceitos de Limites e todos os resultados importantes do Cálculo.

Procuramos desenvolver os conceitos do Cálculo A seguindo o modelo de aprendizagem em espiral proposto por Jerome S. Bruner no livro *O processo da Educação* (1976). Segundo Bruner, qualquer ciência pode ser ensinada a qualquer pessoa desde que se inicie com as ideias mais simples e que estas sejam, posteriormente, retomadas e aprofundadas; entre outros aspectos, o autor descreve algumas particularidades sobre este modelo:

O currículo de uma determinada matéria deve ser determinado pela compreensão mais fundamental que se possa atingir, a respeito dos princípios básicos que dão estrutura a essa matéria. Ensinar tópicos ou habilidades específicas, sem tornar claro seu contexto na estrutura fundamental mais ampla de um dado campo de conhecimento, é anti-econômico em vários e profundos sentidos. Em primeiro lugar, esse ensino torna excessivamente difícil o aluno generalizar, a partir do que aprendeu, para o que vai encontrar depois. Em segundo lugar, a aprendizagem que não consegue captar os princípios gerais é mal recompensada em termos de estímulo intelectual. O melhor meio de despertar interesse por um assunto é tornar valioso o seu conhecimento, isto é, tornar o conhecimento adquirido utilizável na mente de quem o adquiriu, em situações após aquela em que a aprendizagem ocorreu. Terceiro, o conhecimento adquirido por alguém, sem suficiente estrutura a que se ligue, é um conhecimento fadado ao esquecimento.

Análoga à ideia de Bruner também podemos citar o chamado *método estrutural* de LERON (1983) que segundo Garnica (1995, p. 35) é:



Posto em contraposição ao que se chama “método linear” de apresentação de provas em textos didáticos, o método de LERON inicia-se com uma visão panorâmica do resultado a ser provado e dos elementos que contribuirão para constituição de sua prova. A partir daí são estabelecidos vários níveis, dos quais o primeiro (inicial) deve ser, normalmente, bastante curto e livre de tecnicismos. Por outro lado, o nível final “é bastante detalhado, assemelhando-se nisso às provas lineares padrão”.

Assim, buscamos estruturar o Cálculo A privilegiando o estudo das Derivadas e Integrais como ferramentas a serem desenvolvidas gradativamente, em níveis que vão das funções mais simples até as mais complexas, e também, das definições mais intuitivas até as mais abstratas, estando o conceito de Limite no centro deste processo.

#### **4.CONCLUSÃO**

Neste trabalho buscamos estruturar o Cálculo A em uma ordem que estimule a generalização dos conceitos por parte do aluno baseando-se no seu conhecimento prévio, uma vez que “um currículo, à medida que se desenvolve, deve voltar repetidas vezes a essas ideias básicas, elaborando e reelaborando-as, até que o aluno tenha captado inteiramente a sua completa formulação sistemática.” (BRUNER,1976). Além disso, o aprimoramento histórico do Cálculo justifica esta tentativa de reestruturação uma vez que:

O progresso da ciência não é um simples avanço linear, cada estágio determinando a solução de problemas anteriormente implícitos ou explícitos nele, e por sua vez colocando novos problemas. Esse avanço também prossegue pela descoberta de novos problemas, de novas maneiras de focar os antigos, de novas maneiras de enfrentar ou solucionar velhos problemas, de campos de investigação inteiramente novos, de novos instrumentos práticos e teóricos de investigação. (HOBSBAWM, 2001, p. 302 apud GILLI MARTINS, 2005, p.38)



Assim, procuramos proporcionar o estímulo da reflexão acerca dos conceitos do Cálculo, pois “pesquisas a respeito do ensino e aprendizagem de Cálculo no terceiro grau problematizam a apresentação formal dos enunciados matemáticos, de modo linearizado numa cadeia de resultados, que parecem não admitir discussões.”(SAD, 1999: 2). Através desta estrutura queremos desenvolver no aluno da disciplina de Cálculo A um primeiro contato análogo àquele vivenciado por Newton e Leibniz, com conceitos aplicados e intuitivos e, ao fim do processo, estabelecer as bases mais rigorosas da disciplina de uma forma natural e até mesmo necessária.

## 5. REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

- ANTON, H. et al., *Cálculo: Volume 1*, Porto Alegre: Bookman, 2007.
- BRUNER, J. S. *O Processo da Educação*, São Paulo: São Paulo, 1976.
- CAJORI, F, *Uma história da Matemática*. Rio de Janeiro: Ciência Moderna. 2007.
- FLEMMING, D. M., *Cálculo A*, São Paulo: Pearson. 2006.
- GARNICA, A. V. M. , *Fascínio da técnica, declínio da crítica: um estudo da prova rigorosa na formação do professor de Matemática*, Rio Claro, UNESP: 1995. Tese (doutorado) - Universidade Estadual Paulista, Instituto de Geociências e Ciências Exatas.
- GILLI MARTINS, J. C., *Sobre Revoluções Científicas na Matemática*, Rio Claro, UNESP: 2005. Tese (doutorado) - Universidade Estadual Paulista, Instituto de Geociências e Ciências Exatas.
- HOBBSAWM, E. J. *A Era das Revoluções: Europa 1789-1848*. Trad. Maria T. L. Teixeira e Marcos Penchel. Rio de Janeiro: Editora Paz e Terra, 2001.



LEITHOLD, L. *O Cálculo com Geometria Analítica*. São Paulo: Harbra, 1994.

LERON, U. *Structuring Mathematical Proofs*, American Mathematical Monthly, USA: The Mathematical Association of America, 90(3): 174-85, 1983.

SAD, L. A. *Uma Abordagem Epistemológica para o Cálculo*. Disponível em:

<[www.ufrj.br/emanped/paginas/conteudo\\_producoes/docs\\_23/abordagem.pdf](http://www.ufrj.br/emanped/paginas/conteudo_producoes/docs_23/abordagem.pdf)>

Acesso: 28 jun. 2012

SOUZA, A.C. C. et al. *Novas Diretrizes para a Licenciatura em Matemática*. BOLEMA-Boletim de Educação Matemática, Rio Claro: IGCE-UNESP, ano 06, n. 07, 1991.

SWOKOWSKI, E. W. *Cálculo com Geometria Analítica*. São Paulo: Makron Books, 1991.

THOMAS, G. B. et. al. *Cálculo: Volume 1*. São Paulo: Pearson, 2009.